Fundamentos del Análisis de Fourier

Camilo José Carrillo González

Departamento de Enxeñería Eléctrica
Escola Técnica Superior de Enxeñeiros Industriáis
Universidade de Vigo

Vigo, 2003

Índice

Prólogo

Este libro nace de la recopilación del material empleado durante la docencia e investigación que he llevado a cabo en el Departamento de *Enxeñería Eléctrica* de la *Universidade de Vigo*. En él se recogen algunos de los aspectos fundamentales del análisis de Fourier, y como tales, se describen herramientas matemáticas como la Serie de Fourier, la Transformada de Fourier, la Transformada de Fourier Discretizada y, por último, la Serie y Transformada de Fourier en Tiempo Discreto.

No es objeto de esta obra el presentar un análisis exhaustivo de cada una de las transformaciones mencionadas, sino que se pretende que sea una herramienta de apoyo para todos aquellos que deseen acercarse a las teorías de Fourier.

La realización de la presente publicación ha requerido la colaboración de muchas personas. De entre ellas he de agradecer especialmente las contribuciones del profesor José Cidrás Pidre, principalmente en lo referente al análisis de circuitos eléctricos, al profesor Andrés Elías Feijóo Lorenzo, por ayudarme a hacer estos apuntes mejores con sus comentarios y correcciones, y a la profesora Elena Albo López, por su contribución con medidas de campo y por desarrollar las series de Fourier de un tren de pulsos.

Finalmente, quisiera expresar mi agradecimiento a todos los miembros del Grupo de Elecrotecnia y Redes Eléctricas del Departamento de *Enxeñería Eléctrica* de la *Universidade de Vigo*.

Camilo José Carrillo González

Vigo, 22 de marzo de 2003

I. La Transformada de Fourier: una introducción histórica

La ingeniería ha empleado a lo largo de la historia métodos de análisis que trataban de reducir la complejidad matemática de un problema. Estas técnicas se basan en la transformación matemática de las ecuaciones. A modo de ejemplo, se puede ver en la Ilustración I-1 el del empleo de los logaritmos para este propósito.

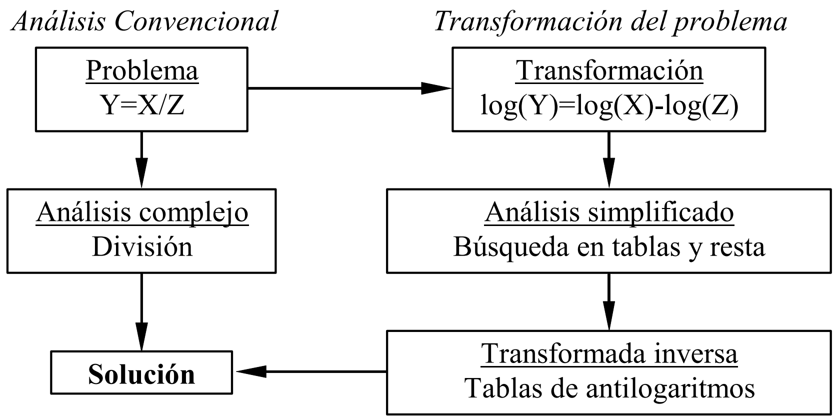


Ilustración I-1: Empleo de transformaciones para la simplificación de un problema

Tal y como se puede apreciar en la figura anterior, con los logaritmos se simplifica el proceso de análisis, transformando un problema complejo como la "división" en uno más fácil como la "resta". En general se puede decir que dichas transformaciones permiten reducir la complejidad de las ecuaciones a través de un proceso unívoco de cambio del dominio de la existencia de las variables del problema (del dominio de las divisiones y multiplicaciones al de las sumas y las restas en el caso del logaritmo).

Una de estas transformaciones es la Transformada de Fourier, que es una herramienta utilizada para obtener la información frecuencial de una determinada función. Este tipo de transformaciones en frecuencia tienen su representación en la naturaleza, por ejemplo, cuando se escucha un sonido se sabe si éste es grave o agudo. El cerebro interpreta el contenido de la información que le está llegando y es capaz de distinguir si está compuesta de frecuencias predominantemente altas o si, por el contrario, las que la componen son predominantemente bajas. Otra muestra presente en la naturaleza es la de la descomposición de la luz solar en distintos colores, ya sea cuando se forma un arco iris o bien cuando ésta atraviesa un prisma. En este caso, una radiación luminosa de composición incierta es descompuesta en haces de luz coloreada, o señales, de frecuencia simple. Esto es en definitiva, lo que se persigue cuando se habla de la Transformada de Fourier, o de la Serie de Fourier. Una herramienta matemática capaz de extraer la información frecuencial de una forma de onda una vez conocido su comportamiento temporal y viceversa.

La historia moderna de estas transformaciones comienza con Euler en 1748, que estudió los movimientos vibratorios de una cuerda, ver Ilustración I-2. Los modos normales son los que se muestran en la siguiente figura, y forman una serie sinusoidal armónica, es decir, su frecuencia es múltiplo de una fundamental. Euler afirmó que si la configuración de la cuerda en un instante determinado se podía poner como combinación lineal de los modos normales, esto seguiría siendo válido en los instantes siguientes de tiempo.

Fue en 1807, cuando Jean-Baptiste-Joseph Fourier presentó en la Academia Francesa de las Ciencias, el resultado de unos estudios de la transmisión del calor en los que incluía un método de resolución para las ecuaciones allí planteadas. Este método es el conocido como

Transformada de Fourier. La presentación de su trabajo tuvo ilustres opositores como Euler, Laplace o Lagrange entre otros. Y aunque la academia le concedió un premio por su teoría, le acusó de ser poco riguroso en la obtención de los resultados. Y fue así que la publicación de su trabajo no se llevó a cabo hasta 15 años después, con su libro titulado 'La teoría analítica del calor' (1822).

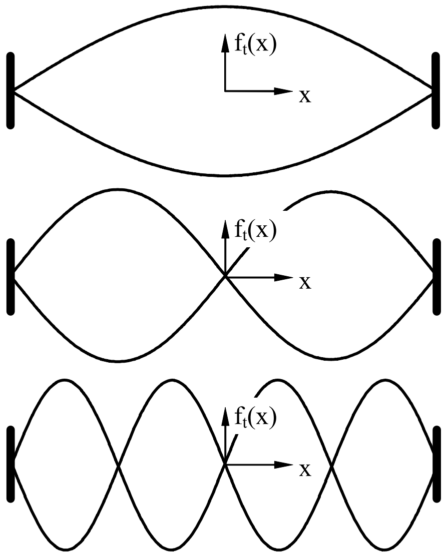


Ilustración I-2: Modos normales de vibración de una cuerda

En su trabajo, Fourier afirmaba que cualquier distribución calórica, en este caso se trata de una distribución espacial aunque podría ser temporal, podía descomponerse en una suma de distribuciones espaciales sinusoidales. Esto es lo que se conoce como Serie de Fourier, aunque más tarde generalizaría esta teoría para extenderla a señales aperiódicas, recibiendo el nombre de Transformada de Fourier. Las objeciones de sus coetáneos a esta teoría se centraban en la proposición de que una función discontinua pudiera representarse de esta manera. A pesar de estas trabas muchos investigadores empezaron a generalizar el trabajo de Fourier, extrapolándolo a campos distintos del análisis del calor.



Ilustración I-3: Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)

En 1829, Dirichlet estableció las condiciones bajo las cuales la función periódica puede representarse mediante una Serie de Fourier. De forma que todas las magnitudes físicas conocidas poseen características que permiten su análisis mediante las teorías de Fourier.

Una de las múltiples aplicaciones fue, a finales del siglo XIX, la de Lord Kelvin que diseñó una computadora analógica con el fin de predecir el flujo y reflujo de las mareas, en la que se pone de manifiesto la utilidad de las teorías propuestas por Fourier para obtener la periodicidad de ciertos fenómenos a través de su observación en el tiempo. Parecía evidente que para

aumentar la exactitud de los resultados sólo había que aumentar el número de componentes de frecuencia calculadas, de forma que si la señal analizada se reconstruía a partir de estas componentes el error sería tanto más pequeño cuanto mayor fuese el número de éstas. Esta suposición se venía abajo cuando se trabajaba con señales discontinuas. Se llega a un punto a partir del cual, por mucho que se eleve el número de componentes calculadas el error permanece constante. En 1899, Josiah Willard Gibbs confirmó teóricamente este resultado, deduciendo que el error queda confinado a las inmediaciones de la discontinuidad y tiende a cero en el resto de los puntos. Lo cual sigue poniendo de manifiesto la validez de dicha transformada, ya que dicho error se limita a una zona muy estrecha y su energía asociada es muy pequeña.

A medida que el uso de la Transformada de Fourier se fue extendiendo se fueron haciendo necesarias herramientas numéricas que permitiesen su implantación en computadoras, para así facilitar el análisis de formas de onda complicadas, las cuales podrían ser inabordables analíticamente. La carga de cálculo en la realización de una Transformada de Fourier es un parámetro muy importante, ya que por ejemplo el número de multiplicaciones depende del cuadrado del número de muestras empleadas. Para acelerar este proceso se fueron desarrollando computadoras cada vez más potentes y algoritmos de cálculo cada vez más eficientes. De estos últimos, quizás el más popular es el desarrollado en 1965 por James W. Cooley, del Centro de Investigación Thomas J. Watson perteneciente a la empresa IBM, y por John W. Tukey, de los Laboratorios Bell. El trabajo de ambos dio lugar a un algoritmo conocido como Transformada Rápida de Fourier o Fast Fourier Transform (FFT). La FFT logra economizar el tiempo de cálculo reduciendo el número de multiplicaciones necesarias para el análisis frecuencial. Esta economía de cálculo ha permitido la implantación de sistemas que calculan la FFT en tiempo real.

La Transformada de Fourier es una herramienta poderosa ya que proporciona métodos para la resolución de ecuaciones difíciles de manejar, como por ejemplo, las respuestas dinámicas de sistemas eléctricos, lumínicos y térmicos. En otros casos permite identificar las aportaciones de índole regular a una señal fluctuante. Son muchas las ramas de la ciencia en las que la Transformada de Fourier se emplea cotidianamente. De hecho, la forma de doble hélice del ADN fue descubierta en 1962 gracias a las técnicas de difracción de Rayos X y el análisis de Fourier. También se puede emplear en el tratamiento de imágenes (ver Ilustración I-4) , para mejorar su contenido o resaltar alguna de la información presente en la misma, en biología,…

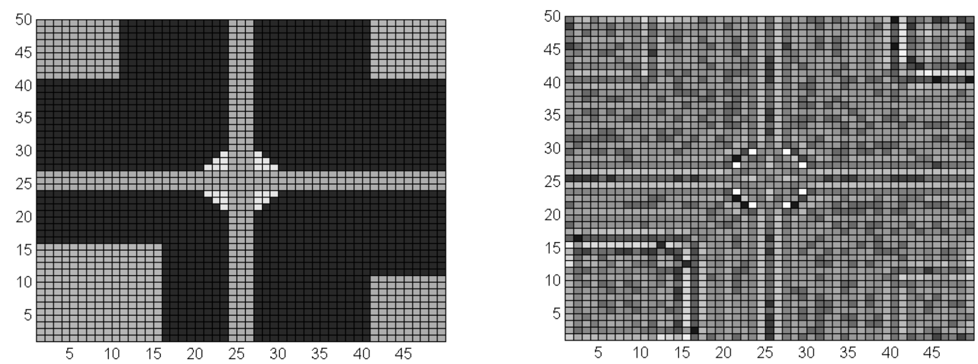


Ilustración I-4: Ejemplo de tratamiento de imágenes donde se han realzado los bordes de la imagen mediante un filtro paso alto

Con la Transformada de Fourier lo que se consigue es un cambio de dominio, o sea, el paso de la información contenida en una señal del dominio temporal, o espacial, al de la frecuencia y viceversa, de modo que permita mejorar el análisis de dicha señal. Es una herramienta muy extendida y aceptada con innumerables seguidores, hasta tal punto que en 1867 Lord Kelvin llegó a afirmar: "*El teorema de Fourier no es solamente uno de los resultados más hermosos del análisis moderno, sino que puede decirse además que proporciona un instrumento indispensable en el tratamiento de casi todas las cuestiones de la física moderna, por recónditas que sean*".

II. Series de Fourier

La aplicación más intuitiva de la teoría de Fourier es aquella que se refiere al tratamiento de las señales periódicas, ya que sus resultados tienen una sencilla interpretación física, tal y como se verá a continuación.

II.1 Funciones periódicas

En primer lugar es necesario definir el concepto de función periódica como aquella cuyos valores se repiten a intervalos regulares, el tiempo[1] entre las sucesivas repeticiones es lo que se conoce como período. Matemáticamente, podemos decir que una función temporal es periódica cuando se cumple la siguiente relación:

$$f(t) = f(t + T) \tag{II.1}$$

para todo valor de t. La constante mínima que satisface la anterior relación es denominada período (T) que, en el caso de funciones temporales, se expresa en segundos. A la parte de la función que abarca un tiempo equivalente a un período T se le denomina ciclo.

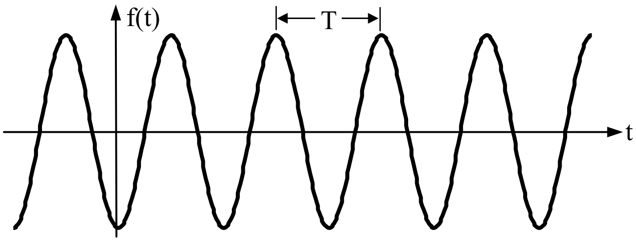


Ilustración II-1: Representación de una onda periódica

En una función periódica se define la frecuencia como la inversa de período, o sea, como el número de ciclos por segundo:

$$fr = 1/T \tag{II.2}$$

Su unidad es el Hercio (Hz). Si se supone que un ciclo equivale a 2π radianes, entonces el número de radianes en un segundo es lo que se conoce como pulsación o frecuencia angular en rad/s o en 1/s:

$$\omega_0 = 2\pi/T \tag{II.3}$$

Generalmente a los términos frecuencia y pulsación se les sueles denominar indistintamente como frecuencia aunque se ha de tener en cuenta que sus unidades son distintas.

En una onda periódica se definen el valor de pico máximo F_{p+} y el valor de pico mínimo F_{p-} como sus valores máximo y mínimos en un período, respectivamente. El valor de pico a pico F_{pp} es la diferencia entre ambos:

$$\left.\begin{array}{l} F_{p+} = \max\{f(t)\} \\ F_{p-} = \min\{f(t)\} \end{array}\right\} \rightarrow F_{pp} = F_{p+} - F_{p-} \tag{II.4}$$

Unos valores típicamente asociados a una función periódica son el de su valor medio:

[1] Los presentes apuntes se centrarán en el estudio de funciones temporales, aunque la teoría de Fourier se puede aplicar en distintas disciplinas con distintos tipos de variables.

$$F_m = \frac{1}{T}\int_0^T f(\tau)\,d\tau \tag{II.5}$$

y su valor eficaz[2] o RMS:

$$F = F_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(\tau)\,d\tau} \tag{II.6}$$

donde las integrales se han definido entre 0 y T, aunque es válido cualquier intervalo que abarque un período, p.e. de –T/2 a +T/2.

Una de las ondas periódicas más representativas es la sinusoidal (ver Ilustración II-1), cuya expresión es:

$$f(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega_0 t + \theta) \tag{II.7}$$

siendo A lo que se conoce como amplitud y θ su fase inicial. En este caso el valor de pico (máximo y mínimo) es $F_p = A$ y el valor de pico a pico $F_{pp} = 2A$. Asimismo, el valor medio para esta forma de onda es igual a cero y su valor eficaz $A/\sqrt{2}$.

II.2 Serie de Fourier

II.2.1 Obtención de la Serie de Fourier

La teoría de Fourier afirma que cualquier función periódica f(t), ya sea más o menos compleja, se puede descomponer en suma de funciones simples, sinusoidales, cuya frecuencia es múltiplo de la función periódica. Esto es, dicha función se puede descomponer en una serie armónica infinita (ver Ilustración II-2) expresada como:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n\,\mathrm{sen}\, n\omega_0 t = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n) \tag{II.8}$$

donde:

- ω_0 (o $fr = \omega_0/2\pi$) es la frecuencia de la función periódica y recibe el nombre de frecuencia fundamental
- a_n, b_n, C_n y θ_n son los coeficientes de la Serie de Fourier que definen las senoides cuya frecuencia es múltiplo de la fundamental

La componente de la Serie de Fourier cuya frecuencia coincide con la fundamental (n=1) recibe el nombre de componente fundamental: $a_1 \cos\omega_0 t + b_1\,\mathrm{sen}\,\omega_0 t$ o $C_1 \cos(\omega_0 t - \theta_1)$. Al resto de las componentes se les denomina componentes armónicas, así el armónico de orden n o enésimo sería aquel cuya frecuencia es n veces la fundamental: $a_n \cos n\omega_0 t + b_n\,\mathrm{sen}\, n\omega_0 t$ o $C_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n)$. Igualmente, la frecuencia de las componentes armónicas recibe a su vez el nombre de frecuencia armónica. En el caso de C_n y θ_n, éstas se suelen llamar además amplitud armónica y ángulo de fase.

Los valores de $a_0/2$ y C_0 representan el valor medio de la función f(t) a lo largo de un período por lo que reciben el nombre de componente continua.

Para el cálculo de los coeficientes de Fourier se emplean las integrales:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_T f(t)\,dt;\quad a_n = \frac{2}{T}\int_T f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt;\quad b_n = \frac{2}{T}\int_T f(t)\,\mathrm{sen}(n\omega_0 t)\,dt \tag{II.9}$$

Además de las siguientes relaciones:

[2] Es habitual encontrar el valor eficaz denominado con sus siglas en inglés RMS (Root Mean Square)

$$C_0 = \frac{a_0}{2}; \quad C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}; \quad \theta_n = \tan^{-1}\left(b_n / a_n\right) \tag{II.10}$$

donde la notación de $\int_T dt$ [3] significa que está extendida a un período cualquiera de la función periódica f(t), por ejemplo de -T/2 a +T/2, ó de 0 a T, …

Alternativamente, la Serie de Fourier se puede representar de forma que incluya los valores eficaces de los distintos armónicos:

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} C'_n \cos\left(n\omega_0 t - \theta_n\right) \tag{II.11}$$

donde cada coeficiente C'_n representa el valor eficaz del armónico de orden n, es decir:

$$C'_n = C_n / \sqrt{2} \tag{II.12}$$

II.2.2 Espectro de frecuencia

Las expresiones anteriores ponen de manifiesto que una función periódica queda descompuesta en una serie infinita de funciones sinusoidales que tienen diferentes frecuencias, todas ellas múltiplos de la frecuencia de la función ω_0, tal y como se muestra en Ilustración II-2.

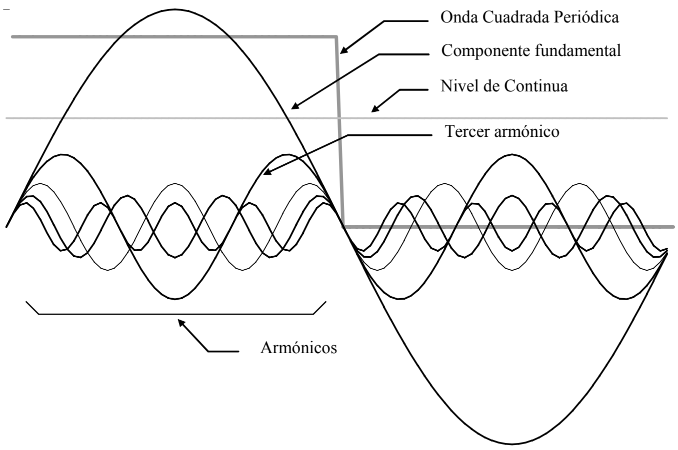


Ilustración II-2: Onda cuadrada con sus 7 primeros armónicos

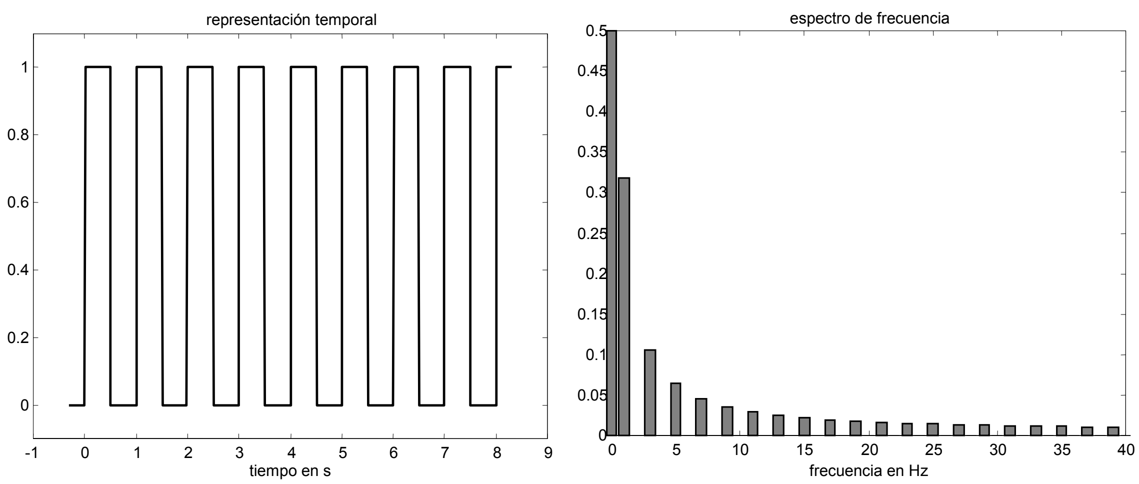


Ilustración II-3: Representación de una onda cuadrada de frecuencia 1Hz con su correspondiente espectro armónico

[3] Para hacer la notación más sencilla se empleará la mayor parte del tiempo la integral entre -T/2 y +T/2, pero no debe olvidarse que el cálculo de los coeficientes se puede realizar sobre cualquier período.

La representación de la amplitud C_n o el valor eficaz C'_n de los distintos armónicos en función de la frecuencia, o del orden del armónico, es lo que se conoce como espectro de frecuencia (Ilustración II-3)

II.2.3 Índices de distorsión

En ciertas áreas de la ingeniería es interesante establecer un parámetro que permita evaluar cuánto se aleja una forma de onda periódica de una sinusoidal de la misma frecuencia, de forma que cuando una forma de onda no es sinusoidal se dice que está distorsionada.

Uno de los parámetros más empleados para evaluar la distorsión es la tasa de distorsión armónica total (THD[4]) la cual relaciona la amplitud (o el valor eficaz) de los armónicos de una forma de onda con el de su componente fundamental, y se define como:

$$THD = \frac{1}{C_1}\sqrt{\sum_{n=2}^{N}\left(C_n\right)^2} \times 100 \tag{II.13}$$

donde el valor de N es el número del armónico máximo que se va a tener en cuenta para el cálculo del THD. Por ejemplo, en ingeniería eléctrica este valor es típicamente 40, o sea, que se evalúa la distorsión de una forma de onda, de tensión o intensidad, teniendo únicamente en cuenta los 40 primeros armónicos. Según esta definición una onda sinusoidal tiene un valor de THD del 0%, mientras que para una onda cuadrada (como la mostrada en la Ilustración II-3) este valor es del 48.3%.

La tasa de distorsión se puede dar de forma individual para cada armónico, de esta forma, la tasa de distorsión armónica HD para el armónico de orden “n” es:

$$HD = C_n / C_1 \times 100 \tag{II.14}$$

Otro parámetro que se puede emplear para indicar el alejamiento entre una forma de onda sinusoidal y una función periódica cualquiera es el Factor de Cresta o CF[5]:

$$CF = F_p / F \tag{II.15}$$

donde F_p es el valor de pico de la función y F su valor eficaz. En el caso de una onda sinusoidal su valor es de $\sqrt{2}$.

II.2.4 Teorema de Parseval

En general para la energía de una función f(t) en un intervalo de tiempo (a, b) se puede poner como:

$$E = \int_a^b \left[f(t)\right]^2 dt \tag{II.16}$$

Esta ecuación integral expresa que si f(t) es la corriente que circula por una resistencia de 1Ω, entonces E es la energía disipada en esa resistencia en el intervalo de tiempo (a, b).

En el caso de una función periódica se puede hablar de energía media por período o potencia media P cuya expresión es:

$$P = \frac{1}{T}\int_T \left[f(t)\right]^2 dt \tag{II.17}$$

donde T es el período.

El teorema de Parseval afirma que la potencia media se puede poner en función de los coefcientes de Fourier como:

[4] Del inglés Total Harmonic Distortion
[5] Del inglés Crest Factor

$$\frac{1}{T}\int_T \left[f(t)\right]^2 dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) = C_0 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 \qquad \text{(II.18)}$$

Si se emplean los valores eficaces de las componentes armónicas definidos en (II.12), entonces:

$$\frac{1}{T}\int_T \left[f(t)\right]^2 dt = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(C'_n\right)^2 \qquad \text{(II.19)}$$

Aplicando esta propiedad a la definición del valor eficaz en (II.6), se obtiene:

$$F_{rms} = \sqrt{\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)} = \sqrt{C_0 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} C_n^2} = \sqrt{C_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(C'_n\right)^2} \qquad \text{(II.20)}$$

De esta forma se puede afirmar que el valor eficaz al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los valores eficaces de las componentes armónicas.

II.2.5 Aproximación mediante una Serie de Fourier finita

En la expresión de la descomposición en Serie de Fourier de una función periódica aparece un sumatorio que incluye un número ilimitado de elementos. En este apartado se verá cómo ponderar cada uno de ellos, de forma que el estudio se pueda limitar a un número finito de componentes armónicas. De esta forma surge el concepto de Serie de Fourier Finita, $S_K(t)$, que es aquella descomposición armónica en la que se tienen en cuenta sólo los primeros K elementos de la Serie de Fourier, o sea:

$$S_K(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{K} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) = C_0 + \sum_{n=1}^{K} C_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n) \qquad \text{(II.21)}$$

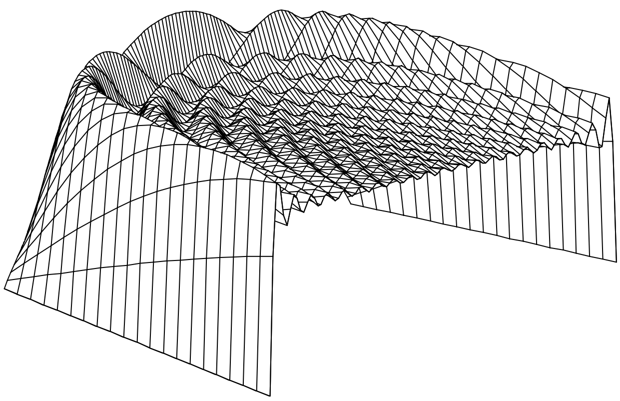


Ilustración II-4: Evolución de una Serie de Fourier finita hacia una onda cuadrada

Si se aproxima la función f(t) mediante la serie finita de Fourier $S_K(t)$, se obtiene la expresión:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{K}\left[a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)\right] + \varepsilon_K(t) \qquad \text{(II.22)}$$

donde $\varepsilon_K(t)$ es el error debido a la aproximación mediante la Serie de Fourier de K términos. Para determinar la calidad de la aproximación es más adecuada una medida cuantitativa del error global por período, para ello se utiliza el error cuadrático medio:

$$E_K(t) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2}\left[\varepsilon_K(t)\right]^2 dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2}\left[f(t) - S_K(t)\right]^2 dt \qquad \text{(II.23)}$$

Se puede demostrar que la mejor aproximación que se puede alcanzar, minimizando el error cuadrático medio recién descrito, mediante una serie armónica finita es, precisamente, la que viene dada por los coeficientes de Fourier. A medida que se van incluyendo términos de la Serie de Fourier en el sumatorio de $S_K(t)$ el valor del error cuadrático va disminuyendo, hasta que el límite obtenemos que:

$$\lim_{k\to\infty} E_K = 0 \qquad \text{(II.24)}$$

O sea, que cuando la Serie de Fourier incluye todos sus términos en el sumatorio, la energía del error cometido al aproximar una función por dicha descomposición es nula.

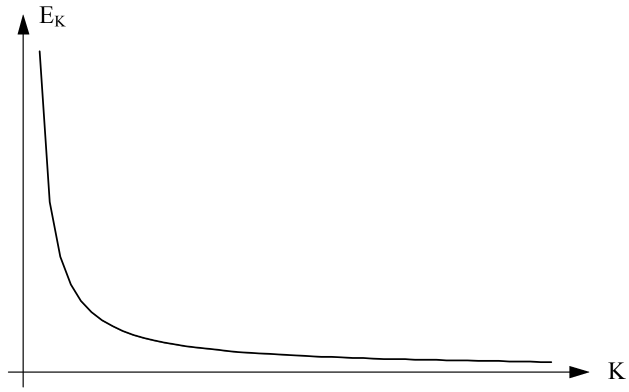


Ilustración II-5: Evolución del error cuadrático medio.

Otra forma de dar el error es:

$$E_K(t) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2}\left[f(t)\right]^2 dt - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{K}\left(a_n^2 + b_n^2\right) \qquad \text{(II.25)}$$

Si la expresión anterior se lleva al límite se obtiene la expresión (II.18) del Teorema de Parseval, con la que se calcula la energía de la función f(t) por período, o potencia, a partir del conocimiento de los coeficientes de la Serie de Fourier. De esta forma, atendiendo a su energía, podemos estimar la importancia relativa de cada armónico, o serie finita de ellos. Por ejemplo, ver Ilustración II-6, se puede elegir como criterio el de escoger como representativa de la señal original aquella serie finita que represente el 95% de la energía por período.

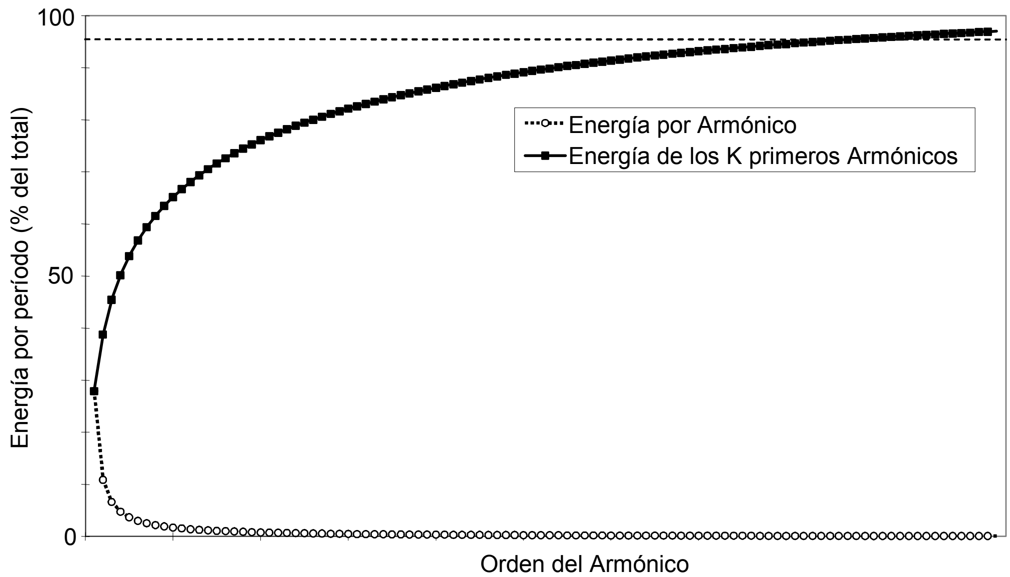


Ilustración II-6: Evolución de la energía por período

II.2.6 El fenómeno de Gibbs

Cuando una función dada se aproxima mediante una Serie de Fourier Finita, habrá un error considerable en la vecindad de la discontinuidad, no importa cuantos términos se quieran emplear. Este efecto se conoce como el fenómeno de Gibbs. Para ilustrar este fenómeno se puede ver en la Ilustración II-7 el resultado de aproximar una onda cuadrada por una serie finita de Fourier.

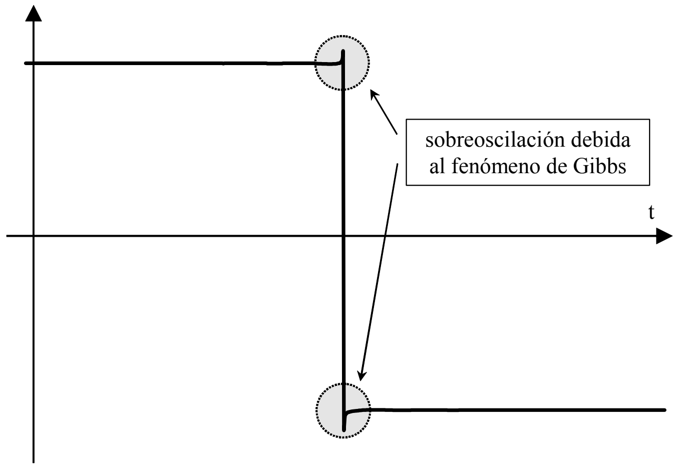


Ilustración II-7: Aproximación de una onda cuadrada por sus 1000 primeros armónicos.

Para una discontinuidad de altura unidad, se obtiene una sobreoscilación de valor 1.09. A medida que aumenta el número de elementos de la serie finita de Fourier que aproxima a la función, la sobreoscilación se va comprimiendo más hacia la discontinuidad aunque su valor permanezca prácticamente constante. Afortunadamente, la energía asociada a esta sobreoscilación (error cuadrático medio), que es lo que realmente da la medida de su importancia, se va haciendo cero. Esto hace que su presencia carezca de importancia. Por ejemplo, si se están estudiando sistemas lineales, la escasa energía en la sobreoscilación difícilmente quedará reflejada en la respuesta del sistema, por lo que el análisis por Fourier será tan válido como cualquier otro (temporal, Laplace,…).

II.2.7 Convergencia de la Serie de Fourier

Para la obtención de los coeficientes de la Serie de Fourier, se emplean las ya conocidas integrales mostradas en (II.9). Sin embargo, en ocasiones las integrales descritas pueden divergir, o sea, puede que algún coeficiente (a_n o b_n) tienda a ∞. Además, aunque los coeficientes sean finitos, puede ocurrir que al sustituirlos en la Serie de Fourier ésta no converja. No obstante, las funciones continuas no presentan problemas de convergencia, y esto es también cierto para muchas señales con discontinuidades. Puesto que el empleo de funciones discontinuas es muy útil, por ejemplo la onda cuadrada, se ha de estudiar más detenidamente el fenómeno de la convergencia. Las condiciones para asegurar esta convergencia se deben a Dirichlet, y pueden resumirse en:

<u>Condición nº 1</u> La función ha de ser absolutamente integrable, o sea:

$$\int_{-T/2}^{+T/2} \left|f(t)\right|^2 dt < \infty \qquad \text{(II.26)}$$

De esta forma garantizamos que: $|a_0| < \infty$; $|a_n| < \infty$; $|b_n| < \infty$

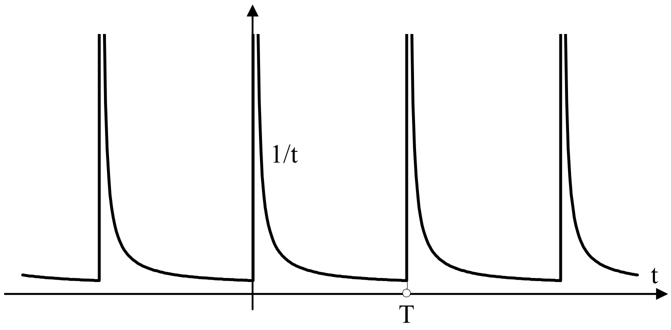


Ilustración II-8: Función que incumple la 1ª condición.

Condición nº 2 En cualquier intervalo de tiempo la función tiene un nº finito de máximos y mínimos.

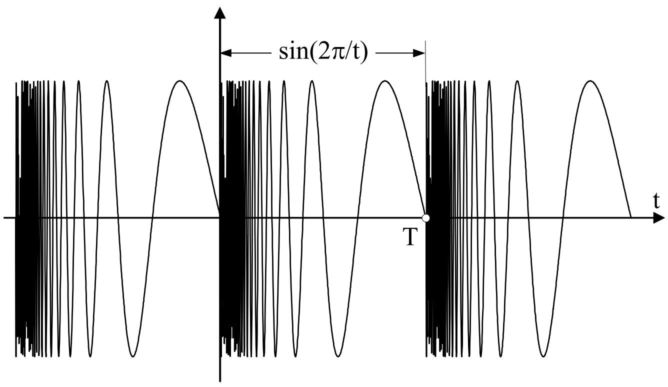


Ilustración II-9: Función que incumple la 2ª condición.

Condición nº 3 En cualquier intervalo finito de tiempo hay un número finito de discontinuidades, y además han de ser de amplitud finita.

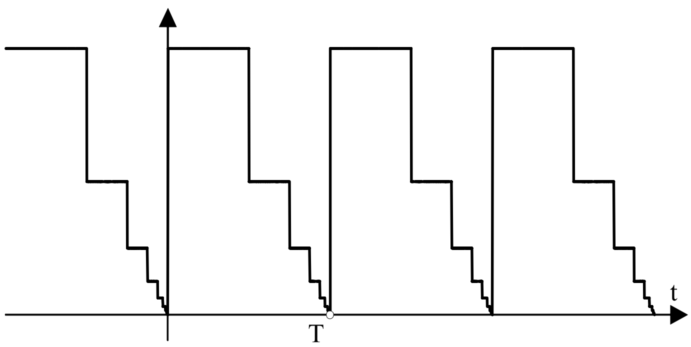


Ilustración II-10: Función que incumple la 3ª condición.

Las funciones que no cumplen las condiciones anteriores no son usuales y, por lo tanto, no son particularmente importantes en el estudio de señales y sistemas. Se ha de decir que todas las funciones periódicas asociadas a sistemas físicos cumplen dichas condiciones y, por lo tanto, son susceptibles de ser estudiadas mediante las Series de Fourier.

Si la función cumple las condiciones anteriores, entonces se puede descomponer en Serie de Fourier, y, por lo tanto, debido a la convergencia de la Serie de Fourier se cumple que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0 \qquad \text{(II.27)}$$

Este resultado invita al empleo de las Series Finitas de Fourier en los análisis numéricos mediante series de Fourier, ya que la energía asociada a armónicos de orden elevado, o sea, de frecuencia elevada, es muy baja, tal y como ya se había indicado en el apartado anterior.



Ilustración II-11: Coeficientes de la descomposición de una onda cuadrada

En las condiciones recién mencionadas se hace referencia a la convergencia de las series de Fourier aún en presencia de discontinuidades finitas. En dichas discontinuidades, la función aproximada por su descomposición en Serie de Fourier (ver Ilustración II-12) viene dada por:

$$f_{sf}\left(t_1\right)=\frac{1}{2}\left[f\left(t_1^-\right)+f\left(t_1^+\right)\right] \tag{II.28}$$

donde:

- t_1 es el instante en el que la función presenta la discontinuidad
- t_1^- y t_1^+ son los instantes anterior y posterior de la discontinuidad
- $f_{sf}(t)$ es la Serie de Fourier
- f(t) es la función original, a partir de la cual se calculan los coeficientes de la Serie de Fourier

A pesar de este resultado se admite la descomposición en Serie de Fourier como equivalente a la función periódica que representa.

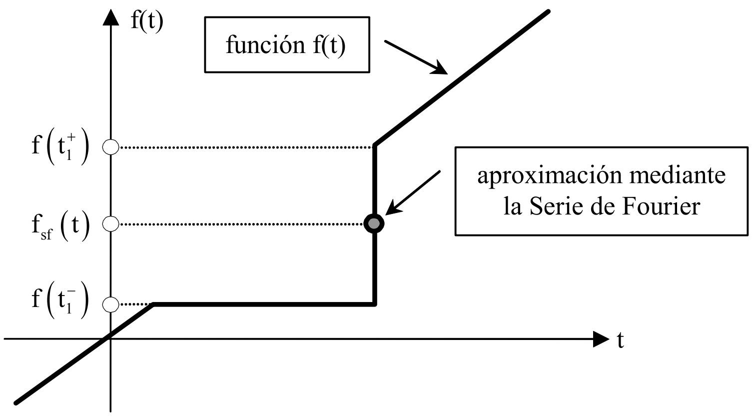


Ilustración II-12: Aproximación de la Serie de Fourier en las discontinuidades

II.3 Análisis de formas de onda periódicas

En este tema se verán todas aquellas condiciones que facilitan el estudio de una función periódica. Las primeras de ellas son simetrías que permiten la deducción de los valores de algunos de los coeficientes de Fourier, a la vez que simplifican sus cálculos.

II.3.1 Simetrías de una función periódica

A continuación se muestran las principales condiciones de simetría de una función periódica, que son:

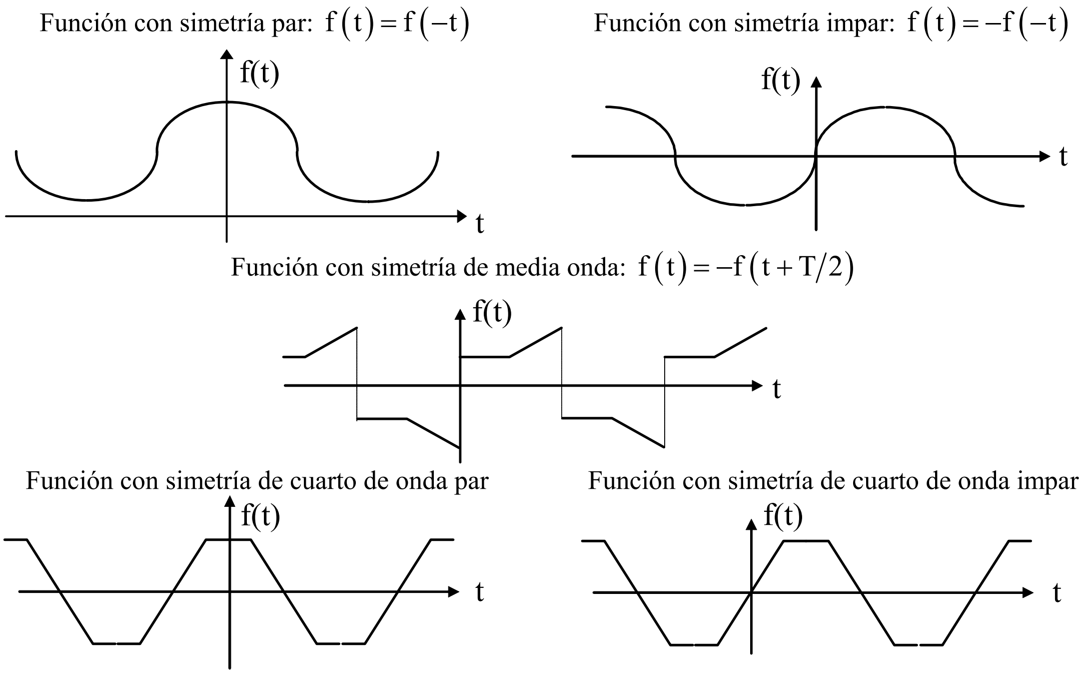


Ilustración II-13: Condiciones de Simetría.

En ocasiones la simetría de una función no es evidente, puede haber ciertas simetrías que queden ocultas, habitualmente por la suma de una constante (ver Ilustración II-14).

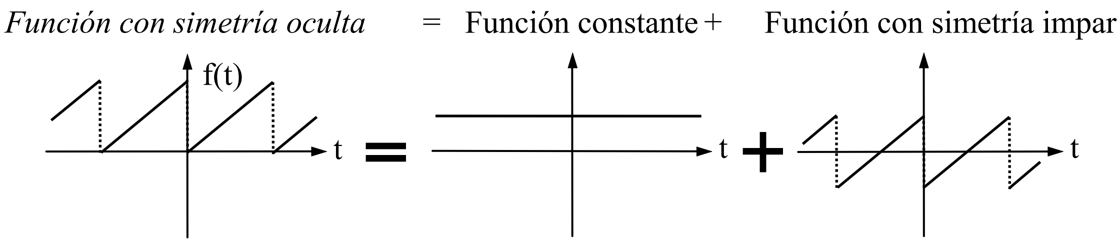


Ilustración II-14: Simetría Escondida.

Además, cualquier función se puede poner como descomposición de una función par más una impar, según la expresión (ver Ilustración II-15):

$$f(t)=f_{par}(t)+f_{impar}(t)\Rightarrow\begin{cases} f_{par}(t)=\dfrac{1}{2}\left[f(t)+f(-t)\right] \\ f_{impar}(t)=\dfrac{1}{2}\left[f(t)-f(-t)\right]\end{cases} \qquad \text{(II.29)}$$

Todas estas condiciones de simetría facilitan el cálculo de los coeficientes de la Serie de Fourier. Por ejemplo, si la función es par, es fácil suponer que la parte impar (parte de senos, b_n) de su descomposición se hace nula, quedando una función par descompuesta en suma de funciones pares (parte de cosenos, a_n). Además el cálculo de los coeficientes distintos de cero, en este caso los a_n, se hace más sencillo. Por ejemplo, cogiendo la integral:

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{0} f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt+\frac{2}{T}\int_{0}^{+T/2} f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt \qquad \text{(II.30)}$$

Si en la primera integral del segundo término se hace el cambio de variable t = -t, llegamos a:

$$a_n=-\frac{2}{T}\int_{T/2}^{0} f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt+\frac{2}{T}\int_{0}^{+T/2} f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt=\frac{4}{T}\int_{0}^{+T/2} f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt \qquad \text{(II.31)}$$

O sea, según el resultado obtenido, basta con que el intervalo de integración se extienda a un semiperíodo para el cálculo de a_n. Se ha de notar, que ese semiperíodo ha de ser precisamente el que va de 0 a T/2 (ó de T a 3T/2,…).

En la Tabla II-1 se muestran todas las condiciones de simetría con sus correspondientes simplificaciones en el cálculo de los coeficientes de la Serie de Fourier.

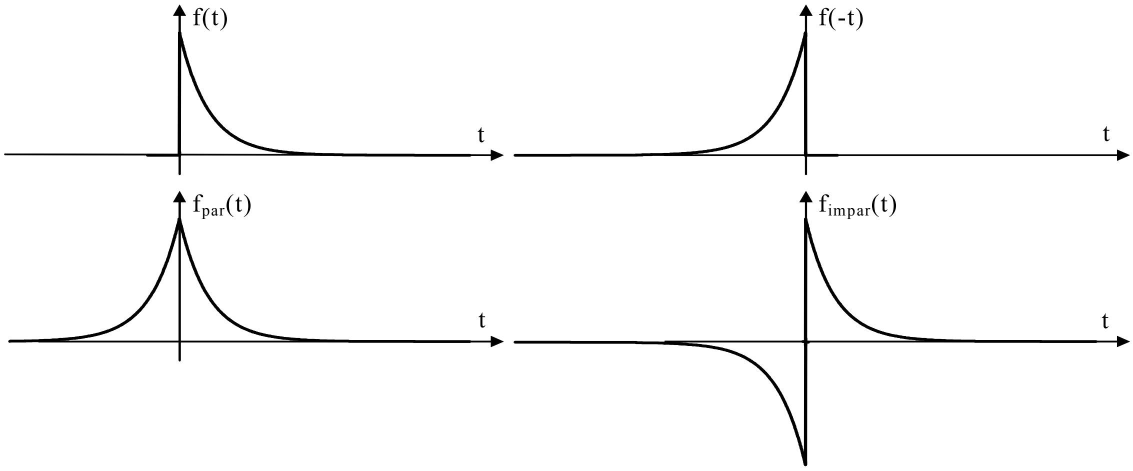
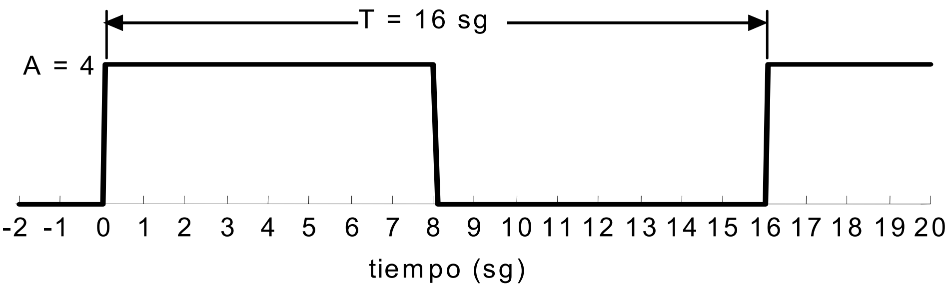


Ilustración II-15: Descomposición de una función en sus partes par e impar.

Ejemplo. Onda Cuadrada

Calcular los coeficientes de la serie de Fourier de la forma de onda mostrada en la figura.



Solución:

Tenemos una onda de período T = 16 sg, o sea, frecuencia fr_0 = 1/16 Hz y pulsación $\omega_0 = 2\pi fr = \pi/8$ rad/sg. Para calcular los coeficientes es necesario elegir un período de integración que "abarque" un período completo de la forma de onda, por ejemplo de 0 a T (también puede ser de –T/2 a T/2). Entonces el valor medio o componente continua es:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,dt = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} A\,dt = A \Rightarrow \frac{a_0}{2} = \frac{A}{2} = 2$$

Los armónicos de orden "n" son:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} A\cos(n\omega_0 t)\,dt + \frac{2}{T}\int_{T/2}^{T} 0\cos(n\omega_0 t)\,dt =$$

$$= \frac{2}{T}\frac{A}{n\omega_0}\left[\operatorname{sen}(n\omega_0 t)\right]_0^{T/2} = \frac{A}{\pi n}\left[\operatorname{sen}(\pi n) - 0\right] = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\operatorname{sen}(n\omega_0 t)\,dt = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} A\operatorname{sen}(n\omega_0 t)\,dt + \frac{2}{T}\int_{T/2}^{T} 0\operatorname{sen}(n\omega_0 t)\,dt =$$

$$= \frac{2}{T}\frac{A}{n\omega_0}\left[-\cos(n\omega_0 t)\right]_0^{T/2} = \frac{A}{\pi n}\left[-\cos(\pi n) + 1\right]$$

La componente "fundamental" está definida por:

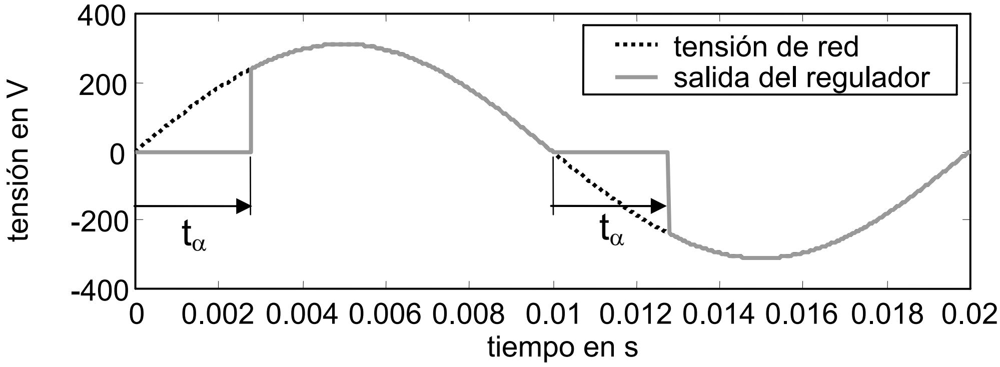
$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 0 \\ b_1 = \dfrac{2A}{\pi} \end{array}\right\} \Rightarrow f_1(t) = \frac{2A}{\pi}\operatorname{sen}(\omega_0 t) \text{ ó } \left.\begin{array}{l} C_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = b_1 \\ \phi_1 = \tan^{-1}(b_1/a_1) = \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow f_1(t) = \frac{2A}{\pi}\cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right)$$

<u>Ejemplo: Onda sinusoidal recortada</u>

En la figura siguiente se muestra la forma de onda de tensión a la salida de un regulador de como el que habitualmente se emplea para regular de la luz en las lámparas. Este tipo de dispositivos varían el valor eficaz de su tensión de salida recortando la forma de onda de entrada, tensión de red sinusoidal. El resultado es que cuanto mayor sea ese recorte menor será la tensión de salida.

A continuación se calculará el contenido armónico de la tensión de salida y la variación de su valor eficaz en función del ángulo de disparo (t_α en figura).

Se supone una tensión en la red eléctrica de 50 Hz con un valor eficaz de 220 V.



Resolución:

La frecuencia de la tensión de red es fr = 50 Hz (período T = 20·ms), o sea, la frecuencia angular se puede poner como: $\omega_0 = 100\pi$ rad/s. Por lo tanto la tensión de red, sinusoidal, se ajusta a la expresión: $u_{red}(t) = \sqrt{2}\,U\operatorname{sen}(\omega_0 t)$, donde U (=220V) es el valor eficaz de la tensión. Entonces, el primer semiperíodo de la tensión a la salida del regulador se puede poner como:

$$u(t) = \begin{cases} \sqrt{2}U\operatorname{sen}(100\pi t) & t \geq t_\alpha \\ 0 & t < t_\alpha \end{cases}$$

La onda representada en la figura anterior es de simetría de media onda, por lo que sus coeficientes de Fourier para los armónicos pares son nulos, mientras que los armónicos impares (k=2n+1) se calculan como:

$$a_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} u(\tau)\operatorname{sen}(k\omega_0\tau)d\tau = \frac{4}{T}\sqrt{2}U\int_{t_\alpha}^{T/2}\operatorname{sen}(\omega_0\tau)\operatorname{sen}(k\omega_0\tau)d\tau$$

$$b_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} u(\tau)\cos(k\omega_0\tau)d\tau = \frac{4}{T}\sqrt{2}U\int_{t_\alpha}^{T/2}\operatorname{sen}(\omega_0\tau)\cos(k\omega_0\tau)d\tau$$

Para k=1

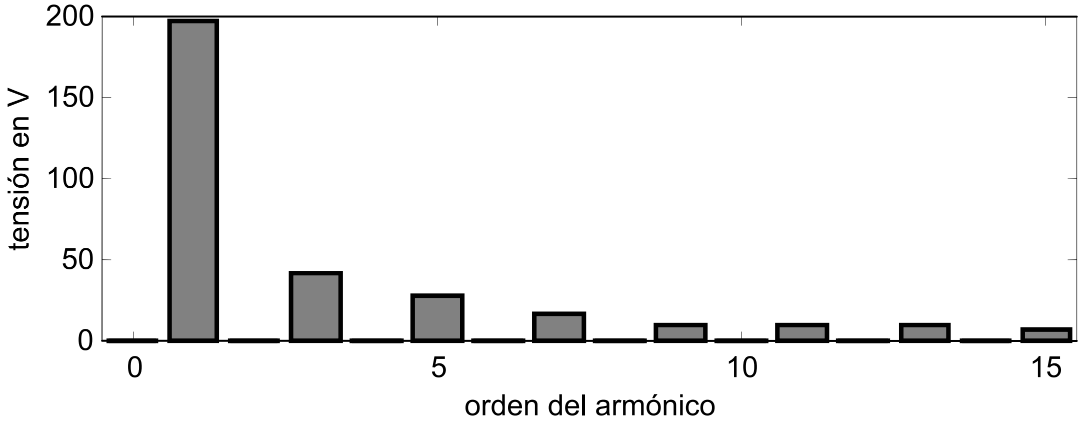
$$a_1 = \sqrt{2}U\left[\frac{\pi-\alpha}{\pi} + \frac{\operatorname{sen}2\alpha}{2\pi}\right]; \quad b_1 = \frac{1}{2\pi}(\cos 2\alpha - 1)$$

Para k = 3, 5, 7, 9, 11...

$$a_k = \frac{\sqrt{2}U}{\pi}\left[\frac{\operatorname{sen}[(1+k)\alpha]}{1+k} - \frac{\operatorname{sen}[(1-k)\alpha]}{1-k}\right]; \; b_k = \frac{\sqrt{2}U}{\pi}\left[\frac{\cos[(1-k)\alpha]-1}{1-k} + \frac{\cos[(1+k)\alpha]-1}{1+k}\right]$$

donde $\alpha = t_\alpha/\omega$ en el ángulo de disparo en radianes.

De esta forma el valor eficaz de cada uno de los armónicos se puede calcular como: $C'_k = \sqrt{\left(a_k^2 + b_k^2\right)/2}$. En la figura siguiente se puede ver el valor eficaz de los 9 primeros armónicos cuando α=60º.



A continuación se muestra la evolución del valor eficaz total, calculado según (II.20), y el de primeros 9 armónicos en función del ángulo de disparo.

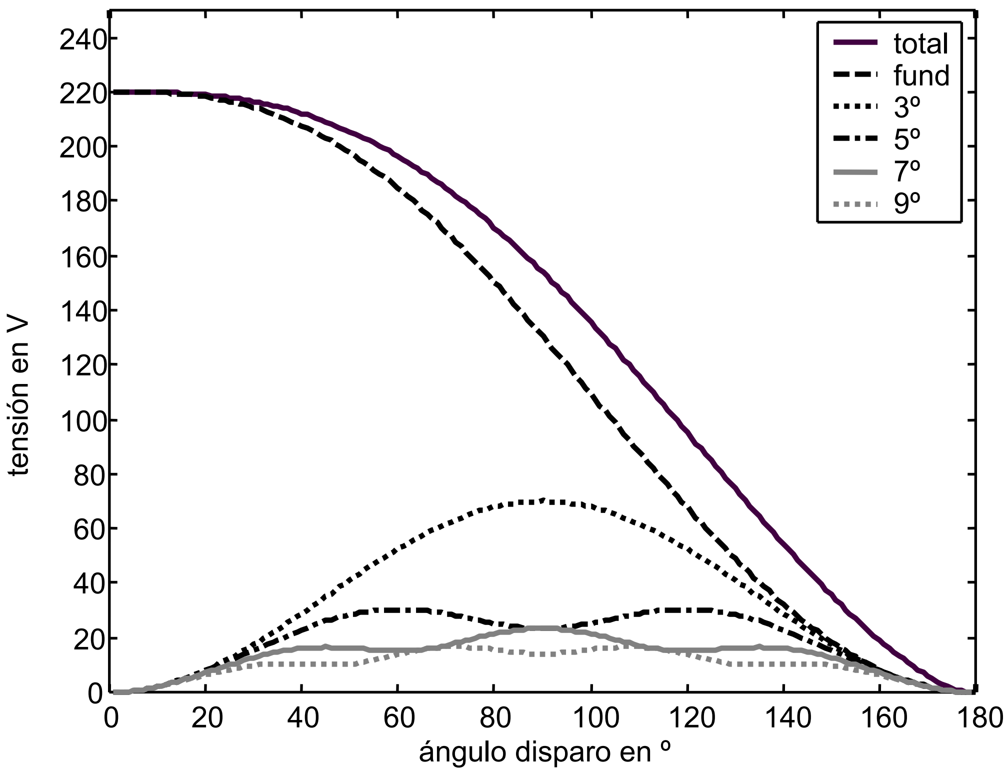


Tabla II-1: Resumen de las condiciones de simetría.

Tipo de simetría	Condiciones	Formas de las series de Fourier	Fórmulas de los coeficientes de Fourier
Par	$f(t)=f(-t)$	$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\omega_0 t)$	$a_n=\frac{4}{T}\int_0^{T/2}f(t)\cos(n\omega_0 t)dt$
Impar	$f(t)=-f(-t)$	$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\,\text{sen}(n\omega_0 t)$	$b_n=\frac{4}{T}\int_0^{T/2}f(t)\,\text{sen}(n\omega_0 t)dt$
Media Onda	$f(t)=-f\left(t+\frac{T}{2}\right)$	$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_{2n-1}\cos\left[(2n-1)\omega_0 t\right]+b_{2n-1}\,\text{sen}\left[(2n-1)\omega_0 t\right]\right]$	$a_{2n-1}=\frac{4}{T}\int_0^{T/2}f(t)\cos\left[(2n-1)\omega_0 t\right]dt$ $b_{2n-1}=\frac{4}{T}\int_0^{T/2}f(t)\,\text{sen}\left[(2n-1)\omega_0 t\right]dt$
Cuarto de onda par	$f(t)=f(-t)$ $f(t)=-f\left(t+\frac{T}{2}\right)$	$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}\cos\left[(2n-1)\omega_0 t\right]$	$a_{2n-1}=\frac{8}{T}\int_0^{T/4}f(t)\cos\left[(2n-1)\omega_0 t\right]dt$
Cuarto de onda impar	$f(t)=-f(-t)$ $f(t)=-f\left(t+\frac{T}{2}\right)$	$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n-1}\,\text{sen}\left[(2n-1)\omega_0 t\right]$	$b_{2n-1}=\frac{8}{T}\int_0^{T/4}f(t)\,\text{sen}\left[(2n-1)\omega_0 t\right]dt$

f(t) es una función periódica de período T y frecuencia $\omega_0=2\pi/T$

II.3.2 Funciones especiales

En la aplicación de las teorías de Fourier se manejan una serie de funciones especiales como son la función impulsoo Delta de Dirac, el tren de impulsos y la función escalón o de Heaviside. En este apartado veremos todas estas funciones.

II.3.2.1 La función Impulso Unitario

La función impulso unitario o Delta de Dirac se puede definir de tres formas:

Definición 1.- Mediante las dos siguientes condiciones:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = 1 \qquad \delta(t) = 0 \quad \forall t \neq 0 \tag{II.32}$$

O sea, es una función confinada en el origen y que tiene un valor tendiendo a infinito es este punto. Además, el área de esta función para cualquier intervalo que abarque el origen, en general de -∞ a +∞ , es la unidad. Obviamente es muy difícil relacionar un impulso con una señal física, sin embargo, se puede pensar en la función impulso como un pulso de duración despreciable y amplitud finita.

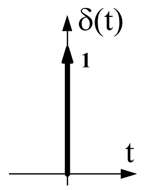


Ilustración II-16: La Función Impulso Unitario.

La función impulso se suele representar con una flecha y número a su lado, indicando éste el área de ese impulso, 1 en el caso del impulso unitario, y no su amplitud, ya que esta última es siempre infinita.

Definición 2.- Otra forma más intuitiva para definir la función impulso es como el límite:

$$\delta(t) = \lim_{n \to 0} f_n(t) \tag{II.33}$$

Siendo $f_n(t)$ una función de área unidad como las mostradas en la Ilustración II-17.

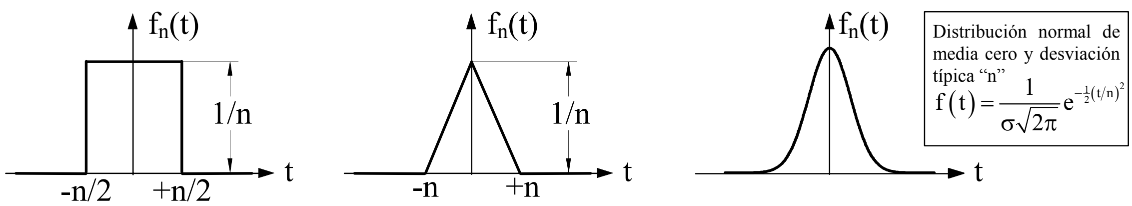


Ilustración II-17: Funciones con área unidad.

Definición 3.- Una forma más para caracterizar a la función impuso es a través la propiedad:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)\,dt = f(0) \tag{II.34}$$

Una vez vistas las tres definiciones anteriores, se puede afirmar que la función impulso no se comporta como una función ordinaria, y que la mejor forma de caracterizarla es a través del comportamiento de las integrales en las que aparece.

Algunas de la propiedades adicionales de la función impulso pueden verse en Tabla II-2.

Tabla II-2: Propiedades adicionales de la función impulso

$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)f(t)dt=f(t_0)$	$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(at)f(t)dt=\frac{1}{\lvert a\rvert}f(0)$
Si f(t) es continua en t = t_0, y a<b, entonces: $\int_a^b\delta(t-t_0)f(t)dt=\begin{cases}f(t_0) & \text{si } a<t_0<b\\ 0 & \text{si } a>t_0 \text{ o } b<t_0\end{cases}$	
Si f(t) es una función continua en t=0, entonces: $f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)$	

II.3.2.2 Tren Periódico de Impulsos Unitarios

Es aquella función periódica definida como:

$$\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT) \tag{II.35}$$

Cuya descomposición en Serie de Fourier es:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)=\frac{1}{T}+\frac{2}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) \tag{II.36}$$

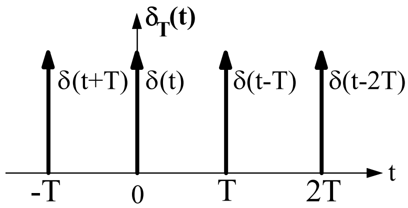


Ilustración II-18: Tren de Impulsos Unitarios.

II.3.2.3 La función Escalón Unitario

Además de la función impulso existe otra función importante en el análisis de Fourier, la función escalón unitario o de Heaviside (ver Ilustración II-19), que se define como:

$$u(t)=\begin{cases}1 & \text{para } t>0\\ 0 & \text{para } t<0\end{cases} \tag{II.37}$$

Como se puede observar esta función no está definida en t = 0. Además se puede comprobar que:

$$\frac{du(t)}{dt}=\delta(t) \tag{II.38}$$

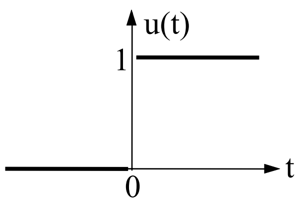


Ilustración II-19: Función escalón unitario.

La función escalón es muy útil para representar discontinuidades. Por ejemplo, una función con una discontinuidad, se puede poner como una función continua más un escalón de altura la de la discontinuidad.

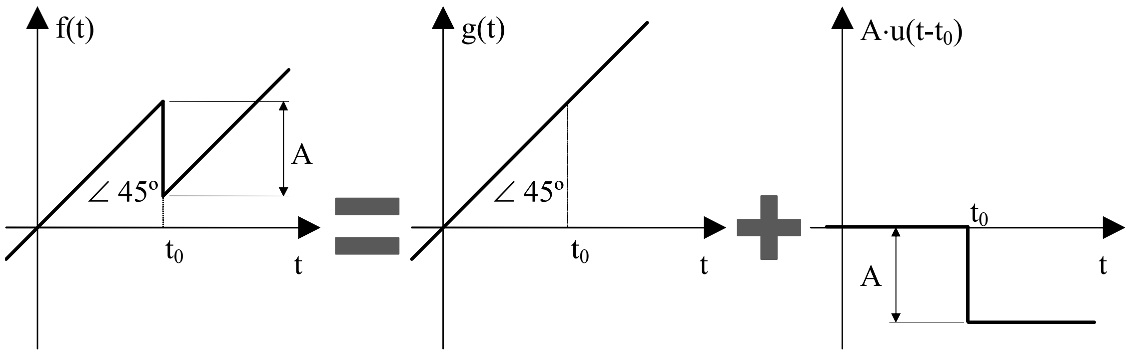


Ilustración II-20: Tratamiento de una discontinuidad mediante un escalón.

A modo de ejemplo, en la Ilustración II-20 se ha descompuesto la función discontinua f(t) en la suma de una función continua g(t) más un escalón cuya altura es A, precisamente la de la discontinuidad de f(t) en $t=t_0$, o sea:

$$f(t)=g(t)+A\,u(t-t_0) \qquad \text{(II.39)}$$

Según esta descomposición la derivada de f(t) se calcula como la derivada de g(t) más un impulso de área A resultante de derivar la función escalón, por lo tanto:

$$\frac{df(t)}{dt}=\frac{dg(t)}{dt}+A\delta(t-t_0) \qquad \text{(II.40)}$$

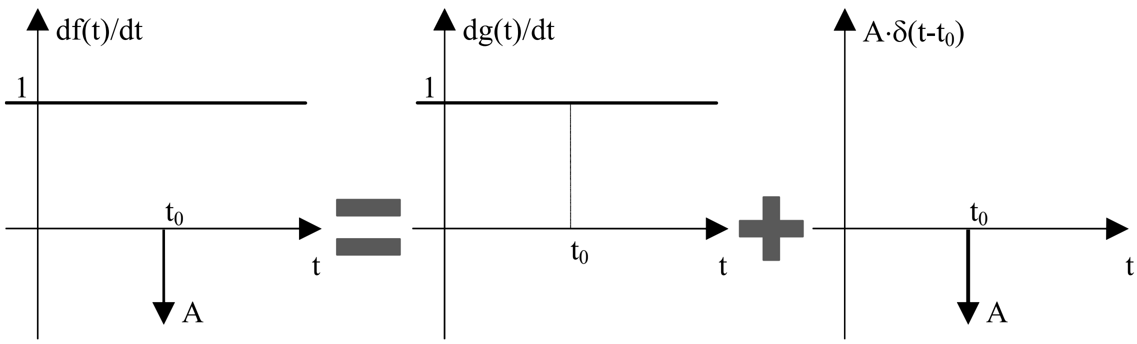


Ilustración II-21: Derivada de una función discontinua

Si la función es periódica, entonces la podemos poner como una función continua más un tren de escalones. Mientras, su derivada es la de una función continua más un tren de impulsos:

$$f(t)=g(t)-\sum_k A_k u(t-t_k) \;\rightarrow\; \frac{df(t)}{dt}=\frac{dg(t)}{dt}-\sum_k A_k\delta(t-t_k) \qquad \text{(II.41)}$$

II.3.2.4 La función sinc

La función sinc se puede obtener como la envolvente de la Transformada de Fourier de las funciones del tipo que se muestra en la siguiente figura:

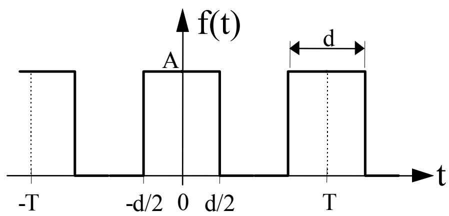


Ilustración II-22: Onda cuadrada

Los coeficientes de Fourier son:

$$a_n = 2\frac{Ad}{T}\frac{\operatorname{sen}(n\pi d/T)}{n\pi d/T} \tag{II.42}$$

Siendo su envolvente una función de tipo sinc definida como:

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \tag{II.43}$$

Esta función que se puede ver representada en la Ilustración II-23.

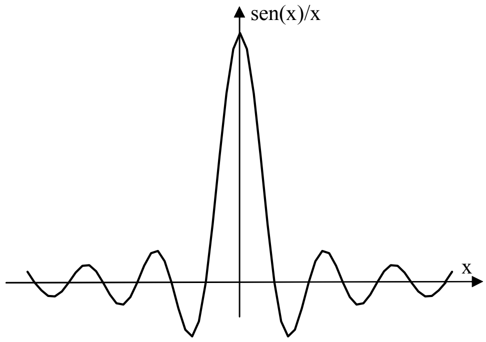


Ilustración II-23: la función sinc

II.3.3 Evaluación de los coeficientes de Fourier por diferenciación

El uso de la función generalizada δ(t) junto con la diferenciación, puede facilitar el cálculo de los coeficientes de las series de Fourier para ciertas funciones que contengan discontinuidades; de forma que las integrales envueltas en el cálculo de la Serie de Fourier presenten importantes simplificaciones.

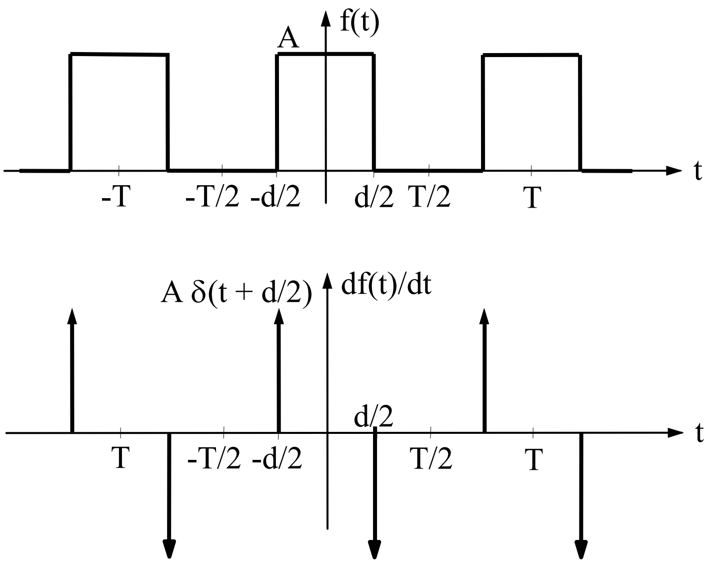


Ilustración II-24: Diferenciación de una onda cuadrada.

Para calcular los coeficientes a_0, a_n y b_n de la Serie de Fourier (II.8), se puede emplear la expresión diferencial:

$$\frac{df(t)}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n \cos n\omega_0 t + \beta_n \operatorname{sen} n\omega_0 t\right) \tag{II.44}$$

Entonces se obtienen los coeficientes de f(t) mediante las relaciones:

$$a_n = -\frac{\beta_n}{n\omega_0} \quad b_n = \frac{\alpha_n}{n\omega_0} \tag{II.45}$$

Esto es útil, siempre y cuando los coeficientes α_n y β_n sean de más fácil obtención que los correspondientes a_n y b_n, tal es el caso del ejemplo de la Ilustración II-24. En este caso para el cálculo de los coeficientes sólo se necesita conocer la Serie de Fourier de un tren de impulsos, cuya obtención involucra integrales muy sencillas. En general, el coeficiente a_0 ha de calcularse a partir de la función original, ya que la diferenciación implica la desaparición de la componente continua de la función.

II.4 Forma compleja de las series de Fourier

Con independencia del método que se vaya a emplear para el cálculo la descomposición de Serie de Fourier, es necesario especificar dos números para cada frecuencia, por ejemplo la amplitud y la fase. No obstante, tales valores pueden representarse mediante un sólo número complejo, siendo esta representación muy popular ya que invita a utilizar el álgebra de los números complejos. De esta forma consigue una notación más compacta y una simplificación en la resolución de algunos problemas.

La forma compleja de la Serie de Fourier es:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n \cdot e^{jn\omega_0 t} \tag{II.46}$$

donde:

$$d_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} f(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt \tag{II.47}$$

Los coeficientes así obtenidos, tienen una simetría con respecto al eje de abcisas, o sea:

$$d_{-n} = d_n^* \tag{II.48}$$

Es una expresión muy compacta que simplifica la notación, en cambio hace que el significado de los coeficientes no sea tan intuitivo. Aparecen, por ejemplo frecuencias negativas (cuando n<0) que en realidad no existen en los sistemas físicos, son una consecuencia matemática que resulta del trabajar con la notación compleja.

Comparando las expresiones (II.8) y (II.46) de la Serie de Fourier, se puede obtener la siguiente relación entre los coeficientes a_n, b_n y d_n:

$$d_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) \tag{II.49}$$

El teorema de Parseval, o lo que es lo mismo la energía media por período de la función toma la siguiente expresión:

$$\frac{1}{T}\int_T |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |d_n|^2 \tag{II.50}$$

Una propiedad fácilmente deducible en la Serie de Fourier compleja, es que el desplazamiento en el tiempo de una función periódica no tiene efecto sobre el espectro de magnitud. En cambio, modifica la fase una cantidad $-n\omega_0 t_0$ radianes para la componente de frecuencia $n\omega_0$ si el desplazamiento temporal es t_0, de forma que:

$$f(t - t_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n e^{-jn\omega_0 t_0} \cdot e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_n \cdot e^{jn\omega_0 t} \tag{II.51}$$

donde: $g_n = d_n e^{jn\omega_0 t_0}$. Como se puede ver, el módulo de los coeficientes permanece constante $|d_n| = |g_n|$, sin embargo no ocurre lo mismo con la fase.

La representación del módulo y fase de d_n frente a la frecuencia recibe el nombre de espectro de frecuencia, y como ésta toma valores discretos se denominan espectros de frecuencia discreta o espectros de líneas.

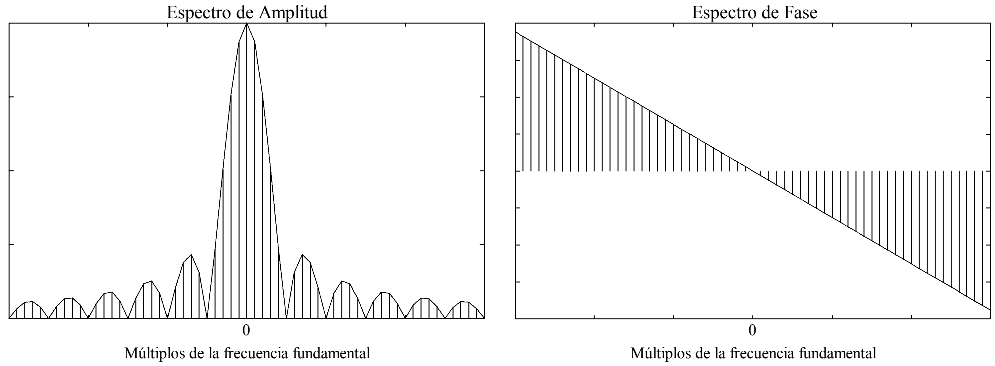


Ilustración II-25: Espectro de frecuencia compleja

II.5 Serie de Fourier de un tren de pulsos

II.5.1 Tren de Pulsos

En ingeniería eléctrica, el tren de pulsos así definido representa la intensidad a la entrada de cierto tipo de rectificadores.

En este apartado se va a calcular como ejemplo la Serie de Fourier del tren de pulsos mostrado en Ilustración II-26 de la señal de la figura 4. La expresión de la señal anterior, cuyo período es T y de pulsación ω_0, por tramos es:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < t_\alpha \\ +A & t_\alpha \le t \le t_\alpha + \Delta t_\delta \\ 0 & t_\alpha + \Delta t_\delta < t < t_\alpha + \frac{1}{2}T \\ -A & t_\alpha + \frac{1}{2}T \le t \le t_\alpha + \Delta t_\delta + \frac{1}{2}T \\ 0 & t_\alpha + \Delta t_\delta + \frac{1}{2}T < t < T \end{cases} \qquad \text{(II.52)}$$

donde α es el retardo del pulso y δ su ancho, teniendo estos dos valores asociados los instantes: $t_\alpha = \alpha/\omega_0$ y $\Delta t_\delta = \delta/\omega_0$, respectivamente.

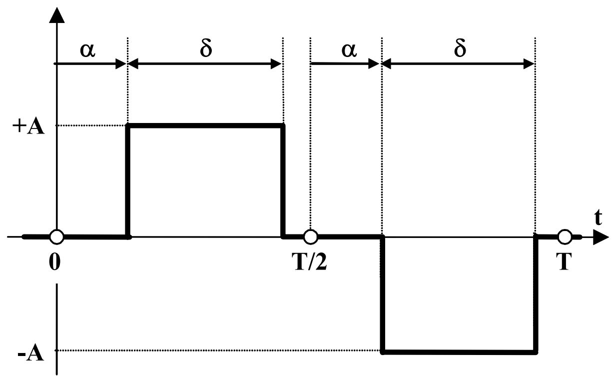


Ilustración II-26: Tren de pulsos

II.5.2 Cálculo de los coeficientes de la Serie de Fourier

II.5.2.1 Caso general

Los coeficientes a_k de la Serie de Fourier para el tren de pulsos definido en el apartado anterior son:

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(k\omega_0 t)dt = \frac{2}{T}\int_{t_\alpha}^{t_\alpha+\Delta t_\delta} A\cos(k\omega_0 t)dt - \frac{2}{T}\int_{t_\alpha+T/2}^{t_\alpha+\Delta t_\delta+T/2} A\cos(k\omega_0 t)dt \qquad (II.53)$$

Integrando y agrupando términos se llega a la expresión:

$$a_k = \frac{4A}{k\pi}\left[\operatorname{sen}(k\frac{\pi}{2})\right]^2 \operatorname{sen}\left[k\frac{\delta}{2}\right]\cos\left[k(\alpha+\frac{\delta}{2})\right]$$

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{si k e par} \\ \frac{4A}{k\pi}\operatorname{sen}(k\frac{\delta}{2})\cos\left[k(\alpha+\frac{\delta}{2})\right] & \text{si k es impar} \end{cases} \qquad (II.54)$$

De igual modo se calcula los coeficientes b_k:

$$b_k = \frac{4A}{k\pi}\left[\operatorname{sen}(k\frac{\pi}{2})\right]^2 \operatorname{sen}\left[k\frac{\delta}{2}\right]\operatorname{sen}\left[k(\alpha+\frac{\delta}{2})\right]$$

$$b_k = \begin{cases} 0 & \text{si k e par} \\ \frac{4A}{k\pi}\operatorname{sen}(k\frac{\delta}{2})\operatorname{sen} k(\alpha+\frac{\delta}{2}) & \text{si k es impar} \end{cases} \qquad (II.55)$$

y la expresión de f(t) queda:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=1(impar)}^{\infty} \frac{4A}{k\pi}\operatorname{sen}(k\frac{\delta}{2})(\operatorname{sen} k(\alpha+\frac{\delta}{2})\operatorname{sen} k\omega t + \cos k(\alpha+\frac{\delta}{2})\cos k\omega t) \\ &= \sum_{k=1(impar)}^{\infty} \frac{4A}{k\pi}\operatorname{sen}(k\frac{\delta}{2})\cos\left[k\omega t - k(\alpha+\frac{\delta}{2})\right] \\ &= -\sum_{k=1(impar)}^{\infty} \frac{2A}{k\pi}\operatorname{sen}\left[k\omega t - k(\alpha+\delta)\right] + \sum_{k=1(impar)}^{\infty} \frac{2A}{k\pi}\operatorname{sen}\left[k\omega t - k\alpha\right] \end{aligned} \qquad (II.56)$$

De dicha expresión se deducen las siguientes características:

- La no existencia de armónicos de orden par ($2f_{red}$, $4f_{red}$….).
- La magnitud de los armónicos tiene tendencia decreciente, dada por la presencia en el denominador del orden del armónico, k.

Si $\delta = \pi$, la expresión se reduce a:

$$f(t) = \sum_{k=1(impar)}^{\infty} \frac{4A}{k\pi}\operatorname{sen}(k\omega_0 t - k\alpha) \qquad (II.57)$$

Cuando el ancho de la señal cuadrada tiende a cero ($\delta \to 0$), tienden a igualarse la magnitud de la componente fundamental y sus armónicas. Esto puede comprobarse en la Tabla II-3, donde en la última columna (C_k/C_1) se presenta, para las primeras componentes armónicas, la relación entre sus magnitudes y la magnitud de la componente fundamental (k=1).

Si el estudio se amplia a las 4 primeras componentes para todos los posibles valores de ancho de pulso ($0 < \delta \leq \pi$), Ilustración II-27, se ve que para valores pequeños de $\delta \leq 30^{o}$, la distorsión de la señal es elevadísima, con un tercer armónico que es siempre mayor que el 90% de la componente fundamental. A medida que aumenta el ancho de pulso, disminuye el valor de las componentes armónicas, pero no todas por igual.

En los siguiente puntos se van a estudiar tres casos particulares de la expresión de la ecuación (II.56), para valores de $\delta = \pi$, $\delta = 2\pi/3$ y $\delta = \pi/6$

Tabla II-3. Frecuencia, amplitud y fase de los primeros armónicos de un tren de pulsos de 50Hz.

K	Frecuencia	C_k	C_k/C_1
1	50Hz	$\frac{4A}{\pi}\text{sen}\frac{\delta}{2}$	1
3	150Hz	$\frac{4A}{3\pi}\text{sen}\left(3\frac{\delta}{2}\right)$	$\frac{\frac{1}{3}\text{sen}\left(3\frac{\delta}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\delta}{2}\right)} = 1 - \left[\frac{\text{sen}\left(\frac{\delta}{2}\right)}{\sqrt{3}/2}\right]^2 \xrightarrow{\delta\to 0} 1$
5	250Hz	$\frac{4A}{5\pi}\text{sen}\left(5\frac{\delta}{2}\right)$	$\frac{\frac{1}{5}\text{sen}\left(5\frac{\delta}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\delta}{2}\right)} = -\frac{3-8\left[1+\left[\text{sen}\frac{\delta}{2}\right]^2-\left[\text{sen}\frac{\delta}{2}\right]^4\right]}{5} \xrightarrow{\delta\to 0} 1$

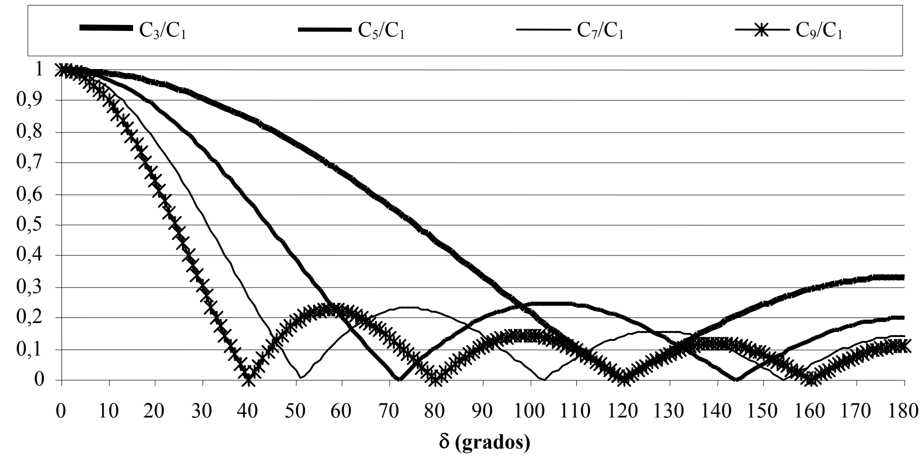


Ilustración II-27: Evolución de la amplitud relativa de los armónicos en función de δ

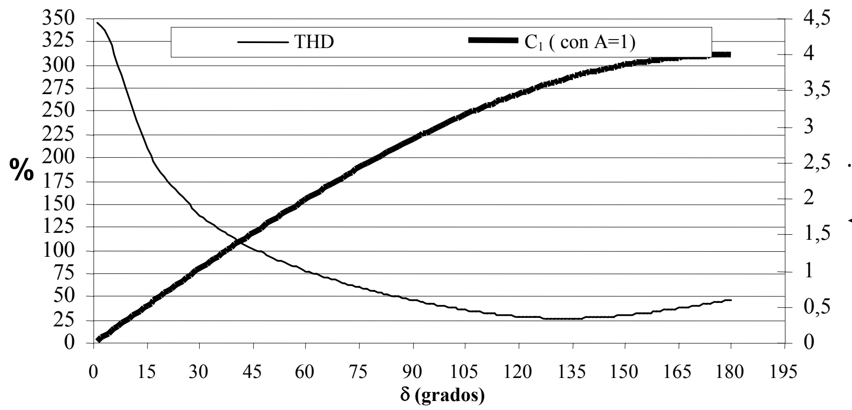


Ilustración II-28: Evolución de la amplitud de la componente fundamental y de la tasa de distorsión armónica total (THD) en función de δ

II.5.2.2 Caso $\delta = \pi$

En este caso la expresión (II.56) se reduce a:

$$f(t) = \sum_{k=1(impar)}^{\infty} \frac{4A}{k\pi} \operatorname{sen}(k\omega t - k\alpha) \qquad \text{(II.58)}$$

Los módulos y fases de los valores de pico o amplitudes de las componentes armónicas se presentan en la Ilustración II-29. Como se puede comprobar, los módulos son inversamente proporcionales al orden k del armónico, disminuyen al aumentar la frecuencia, sin embargo el desfase de la onda de intensidad aumenta.

Tabla II-4. Frecuencia, amplitud y fase de los armónicos de un tren de pulsos de 50Hz

k	Frecuencia	módulo	fase
1	50Hz	$\frac{4A}{\pi}$	$-\alpha$
3	150Hz	$\frac{4A}{3\pi} = \frac{c_1}{3}$	-3α
5	250Hz	$\frac{4A}{5\pi} = \frac{c_1}{5}$	-5α
7	350Hz	$\frac{4A}{7\pi} = \frac{c_1}{7}$	-7α
k	k*50Hz	$\frac{4A}{k\pi} = \frac{c_1}{k}$	$-k\alpha$

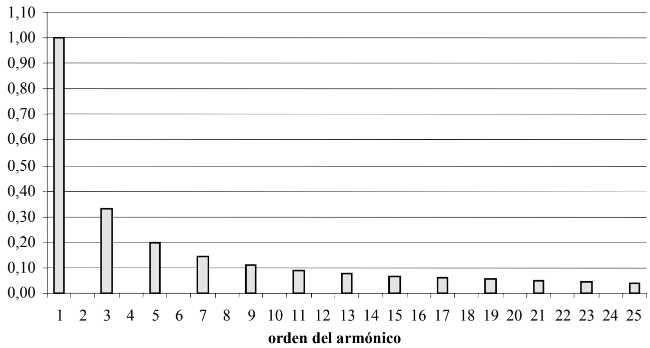


Ilustración II-29: Relación entre la magnitud armónica y la magnitud de la componente fundamental

El valor eficaz de f(t) será:

$$F_{rms} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sum_{k=1} \left(\frac{4A}{k\pi} \right)^2} = \frac{4A}{\pi\sqrt{2}} \sqrt{\sum_{n=1} \frac{1}{(2n-1)^2}} = \frac{4A}{\pi\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\pi^2}{8}} = A \qquad \text{(II.59)}$$

La tasa de distorsión armónica:

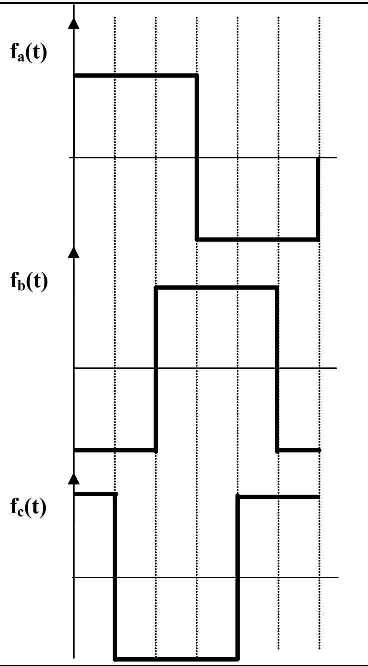
$$THD = \frac{\sqrt{\sum_{k>1} \left(\frac{4A}{k\pi} \right)^2}}{\frac{4A}{\pi}} 100 = 100 \sqrt{\sum_{n=1} \frac{1}{(2n-1)^2} - 1} = 100 \sqrt{\frac{\pi^2}{8} - 1} \cong 48\% \qquad \text{(II.60)}$$

Si tuviéramos un sistema trifásico equilibrado constituido por 3 señales como la estudiada desfasadas $2\pi/3$, el sistema sería:

$$f_a(t) = \sum_{k=1(impar)}^{\infty} \frac{4A}{k\pi} \operatorname{sen}(k\omega t - k\alpha)$$

$$f_b(t) = \sum_{k=1(impar)}^{\infty} \frac{4A}{k\pi} \operatorname{sen}(k\omega t - k\alpha - k2\frac{\pi}{3})$$

$$f_c(t) = \sum_{k=1(impar)}^{\infty} \frac{4A}{k\pi} \operatorname{sen}(k\omega t - k\alpha + k2\frac{\pi}{3})$$



Los valores de módulos y fases obtenidos para cada una de las tres fases se presentan en la Tabla II-5.

Tabla II-5. Frecuencia, amplitud y fase de los armónicos de un tren de pulsos de 50Hz

K	módulo	fase a	fase b	fase c
1	$\frac{4A}{\pi}$	$-\alpha$	$-\alpha-\frac{2\pi}{3}$	$-\alpha+\frac{2\pi}{3}$
3	$\frac{4A}{3\pi}=\frac{c_1}{3}$	-3α	$-3\alpha-3\frac{2\pi}{3}=-3\alpha$	$-3\alpha+3\frac{2\pi}{3}=-3\alpha$
5	$\frac{4A}{5\pi}=\frac{c_1}{5}$	-5α	$-5\alpha-5\frac{2\pi}{3}=-5\alpha+\frac{2\pi}{3}$	$-5\alpha+5\frac{2\pi}{3}=-5\alpha-\frac{2\pi}{3}$
7	$\frac{4A}{7\pi}=\frac{c_1}{7}$	-7α	$-7\alpha-7\frac{2\pi}{3}=-7\alpha-\frac{2\pi}{3}$	$-7\alpha+7\frac{2\pi}{3}=-7\alpha+\frac{2\pi}{3}$

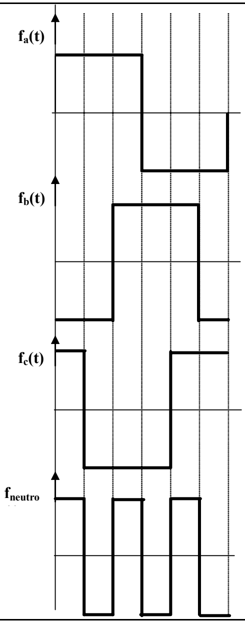
Observando los valores obtenidos en la tabla pueden extraerse las tres siguientes conclusiones:

1. La suma de las señales para las tres fases no es idénticamente nula, sino que las componentes impares múltiplos de tres de la frecuencia fundamental están en fase como puede comprobarse :

$$f_{neutro} = f_a(t) + f_b(t) + f_c(t) = \sum_{k=1(impar)}^{\infty} \frac{4A}{k\pi} \operatorname{sen}(k\omega t - k\alpha)\left[1 + 2\cos k\frac{2\pi}{3}\right] =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{k par} \\ 0 & \text{k impar y no multiplo de 3} \\ 3\displaystyle\sum_{k=3n,n=1...\infty}^{\infty} \frac{4A}{k\pi} \operatorname{sen}(k\omega t - k\alpha) & \text{k impar y multiplo de 3} \end{cases} \qquad \text{(II.61)}$$

Si las señales trifásicas descritas se correspondiera con las intensidades de fase en un sistema trifásico ($f_a=i_a$, $f_b=i_b$, $f_c=i_c$), el valor eficaz de la intensidad que circularía por el neutro ($f_{neutro}=i_{neutro}$) sería de la misma magnitud que el de la intensidad de una de las fases:



$$\begin{aligned} F_{neutro,rms} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sum_{k=3,9..}\left(3\frac{4A}{k\pi}\right)^2} \\ &= 3\frac{4A}{\pi\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1}{3^2}\sum_{n=1}\frac{1}{(2n-1)^2}} \\ &= 3\frac{4A}{\pi\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1}{3^2}\frac{\pi^2}{8}} = A = X_{rms} \end{aligned}$$

2. Si la componente fundamental constituye un sistema equilibrado de secuencia abc, los armónicos

- k=6n+1 n=1…N (k=7, 13,19..) serán de secuencia directa[6]
- k=6n-1 n=1…N (k=5, 11, 17..) serán de secuencia inversa

3. No existen componentes armónicas pares.

II.5.2.3 <u>Caso $\delta = 2\pi/3$</u>

En este caso la expresión (II.56) se reduce a:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=1(impar)}^{\infty}\frac{4A}{k\pi}\mathrm{sen}\left[k\frac{\pi}{3}\right]\cos(k\omega t - k\alpha - k\frac{\pi}{3}) \\ &= \sum_{k=1(impar)}^{\infty}\frac{4A}{k\pi}\mathrm{sen}\left[k\frac{\pi}{3}\right]\mathrm{sen}\left[k\frac{\pi}{2}\right]\mathrm{sen}(k\omega t - k\alpha + k\frac{\pi}{6}) \end{aligned} \quad \text{(II.62)}$$

Para todos los armónicos múltiplos de 3, el término $\mathrm{sen}\,k\pi/3$ es nulo, por tanto en este caso no existen armónicos múltiplos de 3, y las magnitudes de módulo y fase para las primeras componentes armónicas aparecen en la Tabla II-6.

Tabla II-6. Frecuencia, amplitud y fase de los armónicos de un tren de pulsos de 50Hz

k	módulo	fase
1	$\frac{4A}{\pi}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}A}{\pi}$	$-\alpha - \frac{\pi}{3}$
3	0	----
5	$-\frac{2\sqrt{3}A}{5\pi}$	$-5\alpha - \frac{\pi}{3}$
7	$\frac{2\sqrt{3}A}{7\pi}$	$-7\alpha + \frac{\pi}{3}$

[6] Un conjunto de funciones (generalmente tensiones o intensidades) se dice de secuencia directa cuando las funciones (o fases) “b” y “c” están desfasadas con respecto a la función (o fase) “a” un ángulo de -2π/3 y +2π/3, respectivamente. Se dice que es de secuencia inversa, cuando este desfase es de +2π/3 y -2π/3, respectivamente.

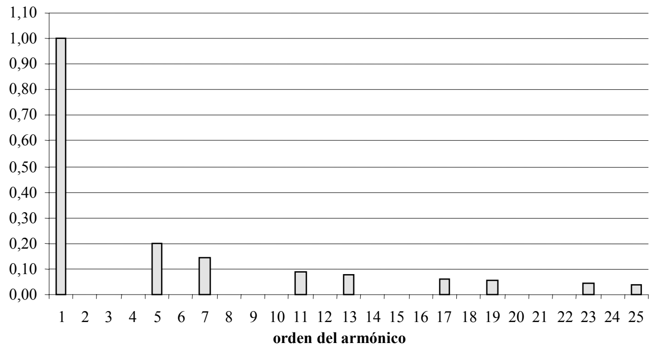


Ilustración II-30: Relación entre la magnitud armónica y la magnitud de la componente fundamental

El valor eficaz, mostrado en la ecuación siguiente, es menor que el obtenido en el caso de δ=π (II.59).

$$F_{rms} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sum_{k=1}\left(\frac{2\sqrt{3}A}{k\pi}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}A}{\sqrt{2}\pi}\sqrt{\sum_{n=1}\frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{3^2}\sum_{n=1}\frac{1}{(2n-1)^2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}A \qquad \text{(II.63)}$$

De forma similar, la tasa de distorsión armónica total puede compararse con la obtenida en (II.60) del 48%. La diferencia fundamental está en la desaparición del 3º armónico.

$$THD = \frac{\sqrt{\sum_{k>1}\left(\frac{2\sqrt{3}A}{k\pi}\right)^2}}{\frac{2\sqrt{3}A}{\pi}}100 = 100\sqrt{\sum_{n=1}\frac{1}{(2n-1)^2} - 1 - \frac{1}{3^2}\sum_{n=1}\frac{1}{(2n-1)^2}} \qquad \text{(II.64)}$$

$$= 100\sqrt{\frac{\pi^2}{9} - 1} \cong 31\%$$

Las diferencias respecto al caso anterior son fundamentalmente dos, por una parte la no existencia de armónicos múltiplos de 3 veces la frecuencia fundamental y por otra que para el mismo valor de la variable A, las componentes obtenidas en el segundo caso son menores, Ilustración II-31. Por tanto en un sistema trifásico equilibrado de intensidades, todas las características del caso 1 serían aplicables, excepto la existencia de intensidad por el neutro.

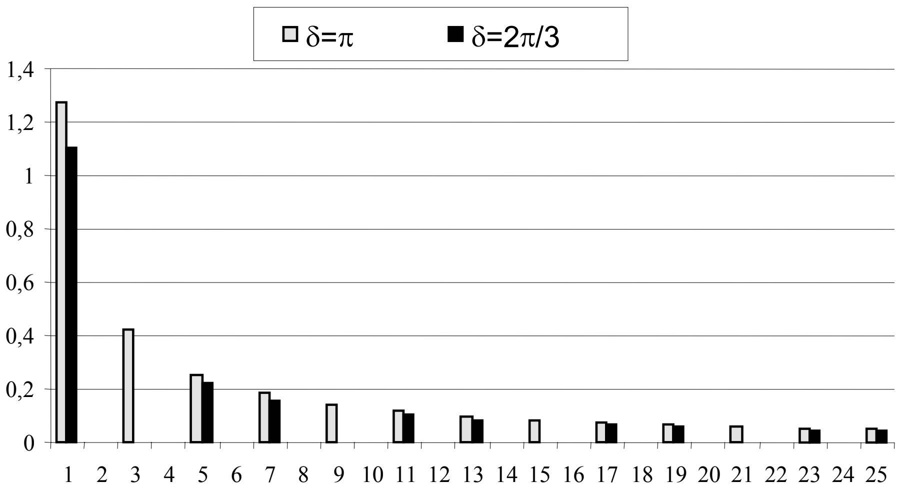


Ilustración II-31: Comparación de ambos casos estudiados con A=1

II.5.2.4 Caso $\delta = \pi/6$

En este caso:

$$f(t) = \sum_{k=1(impar)}^{\infty} \frac{4A}{k\pi} sen(k\frac{\pi}{12}) \cos\left[k\omega t - k(\alpha + \frac{\pi}{12})\right] \qquad (II.65)$$

y se van a obtener componentes armónicas impares de mucha mayor magnitud que en los casos anteriores, tal y como se refleja en la las siguiente tabla y figura.

Tabla II-7. Frecuencia, amplitud y fase de los armónicos de un tren de pulsos de 50Hz

k	módulo	C_k/C_1
1	$\frac{4A}{\pi} sen(\frac{\pi}{12})$	1
3	$\frac{4A}{3\pi} sen(\frac{\pi}{4})$	$0,91 >> \frac{1}{3}$
5	$\frac{4A}{5\pi} sen(\frac{5\pi}{12})$	$0,74 >> \frac{1}{5}$
7	$\frac{4A}{7\pi} sen(\frac{7\pi}{12})$	$0,533 >> \frac{1}{7}$
9	$\frac{4A}{9\pi} sen(\frac{9\pi}{12})$	$0,3 >> \frac{1}{9}$

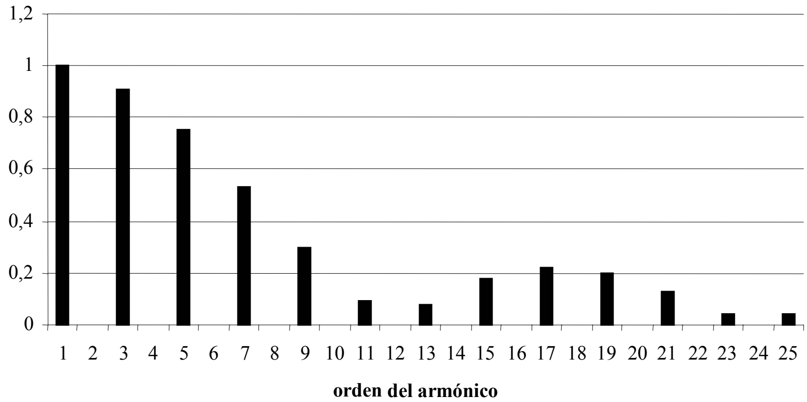


Ilustración II-32: Relación entre la magnitud armónica y la magnitud de la componente fundamental

El valor eficaz de la señal será más bajo que en los casos anteriores:

$$F_{rms} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sum_{\substack{k=1 \\ impar}} \left(\frac{4A}{k\pi} sen\left(\frac{k\pi}{12}\right)\right)^2} \cong \frac{0,33}{\sqrt{2}} A$$

Estas elevadas componentes armónicas van a dar lugar a una elevadísima tasa de distorsión armónica:

$$THD = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{\sum_{\substack{k=3 \\ impar}} \left(\frac{4A}{k\pi} sen\left(\frac{k\pi}{12}\right)\right)^2}}{\frac{4A}{\pi} sen\left(\frac{\pi}{12}\right)} \cong 143,53\%$$

II.5.2.5 Comparación de resultados

Por último se presenta la comparación entre los tres casos estudiados, para igual amplitud A=1. La componente fundamental disminuye considerablemente al disminuir el ancho de pulso δ. Para el caso δ=π/6, la magnitud de las componentes armónicas es comparable y por tanto la tasa de distorsión armónica se dispara.

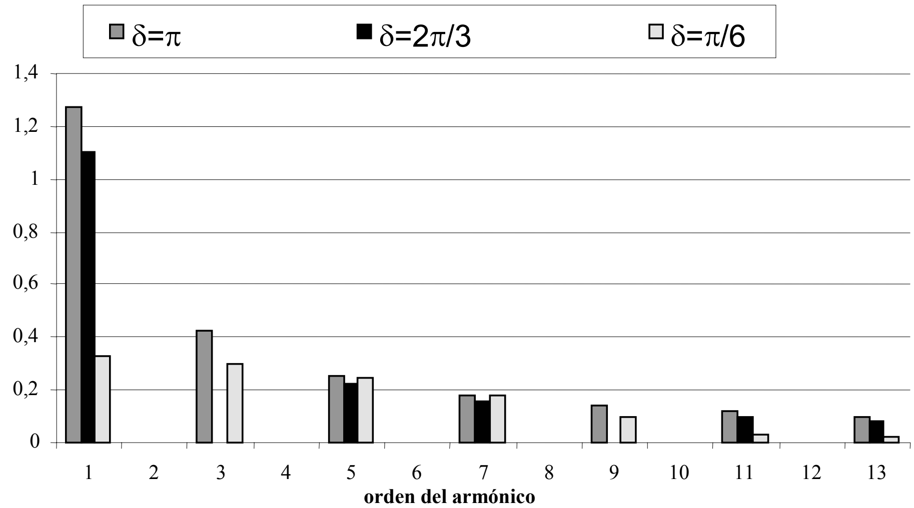


Ilustración II-33: Relación entre la magnitud armónica y la magnitud de la componente fundamental

II.5.3 Forma de onda triangular

Otra forma de onda muy interesante en la práctica es la triangular representada en la Ilustración II-34.

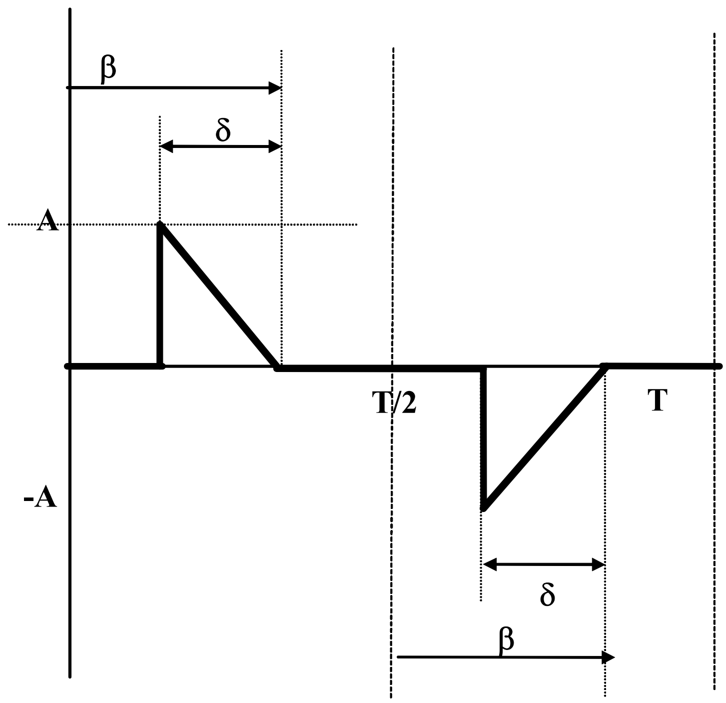


Ilustración II-34: Forma de onda triangular

La expresión para la forma de onda triangular se puede poner como:

$$f(t)=\begin{cases}0 & t<t_\beta-\Delta t_\delta\\ \dfrac{A}{\Delta t_\delta}\left(t_\beta-t\right) & t_\beta-\Delta t_\delta\le t\le t_\beta\\ 0 & t_\beta<t<t_\beta-\Delta t_\delta+\dfrac{T}{2}\\ \dfrac{-A}{\Delta t_\delta}\left(t_\beta+\dfrac{T}{2}-t\right) & t_\beta-\Delta t_\delta+\dfrac{T}{2}\le t\le t_\beta+\dfrac{T}{2}\\ 0 & t_\beta+\dfrac{T}{2}<t<T\end{cases} \qquad \text{(II.66)}$$

donde: $t_\beta=\beta\dfrac{T}{2\pi}$ y $\Delta t_\delta=\delta\dfrac{T}{2\pi}$

De la función f(t), se obtiene la expresión en Serie de Fourier:

$$f(t)=\sum_{k=1(impar)}^{\infty}\frac{-4A}{k^2\pi\delta}\text{sen}(k\frac{\delta}{2})\text{sen}\left[k\omega t+k(\beta-\frac{\delta}{2})\right]+\sum_{k=1(impar)}^{\infty}\frac{A}{k\pi}\text{sen}\left[k\omega t+k(\beta-\delta)\right] \qquad \text{(II.67)}$$

En la que se puede observar:

- La no existencia de armónicos de orden par ($2f_{red}$, $4f_{red}$….).
- La magnitud de los armónicos tiene tendencia decreciente, dada por la presencia en el denominador del orden del armónico, k.
- Si comparamos esta expresión con la que se obtuvo para el pulso, la amplitud de los armónicos de ésta es menor al estar dividido el primer término del sumatorio por el orden del armónico al cuadrado.

III. Integral de Fourier y Espectros Continuos

III.1 De la Serie de Fourier a la integral de Fourier

Hasta ahora a las funciones a las que se le han aplicado las teorías de Fourier se les ha exigido periodicidad, que fue la primera aplicación de estas teorías. En cambio después de introducir las series de Fourier, su autor generalizó las mismas hacia lo que se llama la Transformada de Fourier. Esta operación es aplicable a prácticamente cualquier tipo de función, periódica o no, mediante las siguientes relaciones:

Transformada de Fourier $$F(\omega) = \Im\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-j\omega t} dt \qquad \text{(III.1)}$$

Transformada Inversa de Fourier $$f(t) = \Im^{-1}\{f(t)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, e^{-j\omega t} d\omega \qquad \text{(III.2)}$$

donde t representa al tiempo en s y ω a la frecuencia en rad/s.

Con la transformación asociada al empleo de la función F(ω) definida en (III.1), se obtiene una función continua en el dominio de la frecuencia ω (en rad/s). De forma que a F(ω) se le llama espectro continuo de f(t), o bien, Transformada de Fourier de f(t).

La función F(ω) es en general compleja, pudiéndose dividir en su partes real e imaginaria, o en módulo (espectro de magnitud) y fase (espectro de fase), es decir:

$$F(\omega) = R(\omega) + jX(\omega) = |F(\omega)|\, e^{j\phi(\omega)} \qquad \text{(III.3)}$$

Por el contrario, en las aplicaciones que se verán aquí la función f(t) se supondrá una función real, como es de suponer cuando se habla de fenómenos físicos.

Ahora bien, ¿cuál es el significado físico de la Transformada de Fourier? Para llegar a él se puede partir de la Serie de Fourier y buscar la generalización hacia una función aperiódica. Se puede tomar como partida la función periódica:

$$f_T(t) = \begin{cases} A & -d/2 < t < +d/2 \\ 0 & t < -d/2,\, t < +d/2 \end{cases} \qquad f_T(t+T) = f_T(t) \qquad \text{(III.4)}$$

De la función anterior se puede obtener una función no periódica cuando $T \to \infty$, esto es:

$$f(t) = \begin{cases} A & -d/2 < t < +d/2 \\ 0 & t < -d/2,\, t < +d/2 \end{cases} \qquad \text{(III.5)}$$

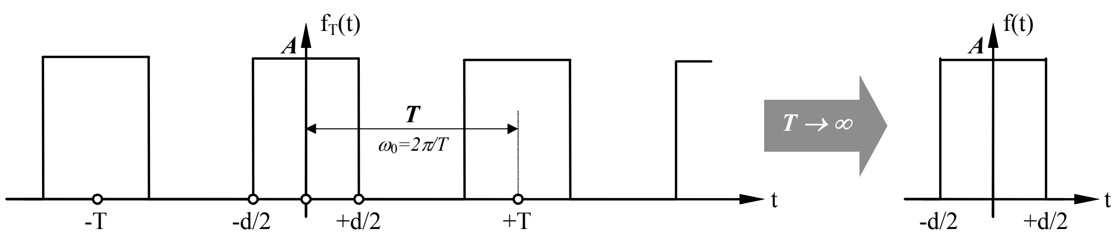


Ilustración III-1: Evolución de una función periódica a una función aperiódica.

Pero lo que resulta de interés para el acercamiento a la Transformada de Fourier es el comportamiento en el dominio de la frecuencia. ¿Qué pasa con los coeficientes de la Serie de Fourier? En el caso representado en la Ilustración III-1 dichos coeficientes son:

$$d_n = \frac{Ad}{T}\frac{\operatorname{sen}\left(n\pi d/T\right)}{n\pi d/T} \tag{III.6}$$

Aunque quizás lo más relevante sea la evolución del producto Td_n a medida que aumenta el período T. Lo que le ocurre a dicho producto es que cada vez los sucesivos armónicos están más cerca unos de otros, ya que se reduce la distancia entre $2\pi\left(n+1\right)/T = \left(n+1\right)\omega_0$ y $2\pi n/T = n\omega_0$. De forma que en el límite, cuando $T\rightarrow\infty$, los distintos valores $2\pi n/T = n\omega_0$ forman un espectro continuo de frecuencias que se designa con la variable ω. De forma que:

$$Td_n = Ad\frac{\operatorname{sen}\left(n\omega_0\right)}{n\omega_0} \xrightarrow{T\rightarrow\infty} E\left(\omega\right) = Ad\frac{\operatorname{sen}\omega}{\omega} \tag{III.7}$$

donde E(ω) es la envolvente de los valores Td_n para cualquier valor de T. O sea: $E\left(n\omega_0\right) = Td_n$. Y de esta forma cuando $T\rightarrow\infty$ se cumple la igualdad $E\left(\omega\right) = Td_n$

Resumiendo, cuando en una señal periódica del tipo $f_T(t)$ el período se hace muy grande, la envolvente de Td_n (E(ω)) y los valores de Td_n son la misma función.

Entonces ahora le toca el turno a la pregunta. ¿Y cómo se calcula la envolvente E(ω)? Si se parte de la expresión para los coeficientes de la Serie de Fourier se llega fácilmente a:

$$E\left(n\omega_0\right) = T\underline{d}_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(t\right)e^{-jn\omega_0 t}dt \xrightarrow{T\rightarrow\infty} E\left(\omega\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(t\right)e^{-j\omega t}dt \tag{III.8}$$

Donde ésta es precisamente la función que se ha definido al principio (III.1) como Transformada de Fourier. Esto se puede interpretar como si la función f(t) estuviese compuesta de infinitos armónicos separados un infinitésimo. Del mismo modo:

$$f_T\left(t\right) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} F\left(n\omega_0\right)e^{jn\omega_0 t}\omega_0 \xrightarrow{T\rightarrow\infty} f\left(t\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F\left(\omega\right)e^{j\omega t}d\omega \tag{III.9}$$

Esta última expresión integral es la que se había definido anteriormente como la Transformada Inversa de Fourier, surgida de la tendencia del sumatorio hacia la integral en el límite.

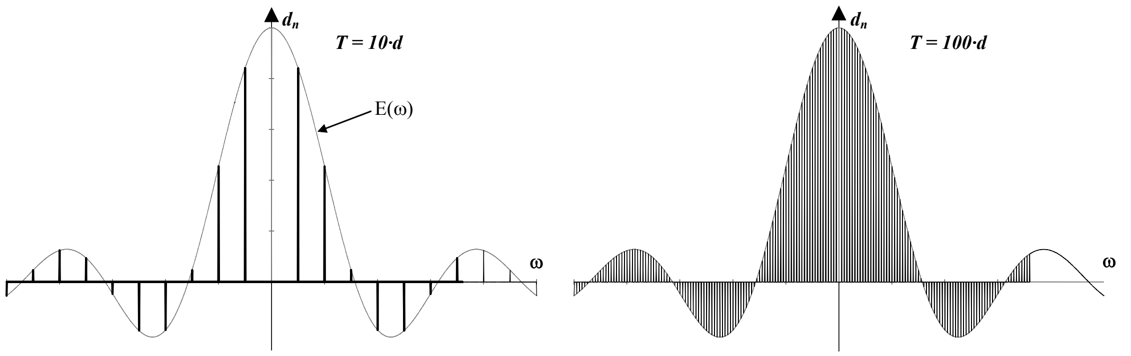
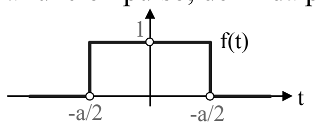


Ilustración III-2: Evolución de la Serie de Fourier hacia su envolvente mediante el aumento de T.

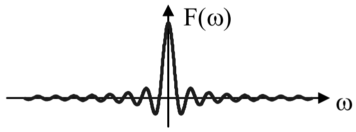
Ejemplo:
Se va a calcular la transformada de Fourier de la función pulso, definida por:

$$f(t)=\begin{cases}1 & -a/2<t<+a/2\\ 0 & t>+a/2 \ \text{ o } \ t<-a/2\end{cases}$$



Resolución:
La transformada de Fourier es una función en ω obtenida mediante la integral:

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-a/2}^{+a/2} 1e^{-j\omega t}dt=a\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}a\omega\right)}{\frac{1}{2}a\omega}$$



III.2 Propiedades de la Transformada de Fourier

A continuación se enumeran las propiedades más importantes de la Transformada de Fourier. En todas ellas se seguirá la siguiente notación:

- f(t) Función Temporal.
- F(ω) ó $\Im\{f(t)\}$ es la Transformada de Fourier de f(t).
- R(ω) es la parte real de F(ω).
- X(ω) es la parte imaginaria de F(ω).

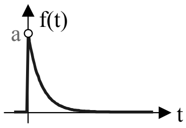
III.2.1 Simetría

Si f(t) es una función real entonces:

- R(ω) es una función par en ω.
- X(ω) en una función impar en ω.
- F(-ω) = F*(ω)
- |F(ω)| es par y ∠F(ω) es impar.
- Si la Transformada de Fourier de una función real es real entonces f(t) es una función par, o sea, si f(t) es par X(ω) es igual a cero.
- Si la Transformada de Fourier de una función es imaginaria entonces f(t) es una función impar, o sea, si f(t) es impar R(ω) es igual a cero.

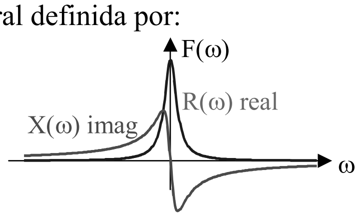
Ejemplo:
Se va a calcular la transformada de Fourier de la función definida por:

$$f(t)=\begin{cases}e^{-at} & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$$



Resolución:
La transformada de Fourier es el resultado de la integral definida por:

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{0}^{+\infty} e^{-at}e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{j\omega+a}$$



De forma que:

$$R(\omega)=\frac{a}{\omega^2+a^2};\ X(\omega)=\frac{-\omega}{\omega^2+a^2} \qquad \left|F(\omega)\right|=\frac{1}{\sqrt{\omega^2+a^2}};\ \phi(\omega)=\tan^{-1}\left(\frac{-\omega}{a}\right)$$

III.2.2 Linealidad

Si $\Im\{f_1(t)\} = F_1(\omega)$ y $\Im\{f_2(t)\} = F_2(\omega)$ entonces:

$$\Im\{af_1(t) + bf_2(t)\} = aF_1(\omega) + bF_2(\omega) \tag{III.10}$$

III.2.3 Desplazamiento Temporal y Frecuencial

Esta propiedad afirma que:

$$\Im\{f(t - t_0)\} = F(\omega)e^{-j\omega t_0} \tag{III.11}$$

De forma que el espectro de magnitud se conserva, mientras que el de fase se ve afectado precisamente el ángulo ωt_0. O dicho de otra forma:

$$\text{Si } \Im\{f(t)\} = |F(\omega)|e^{-j\omega t_0} \Rightarrow \begin{cases} |\Im\{f(t - t_0)\}| = |F(\omega)| \\ \angle\Im\{f(t - t_0)\} = \phi(\omega) - \omega t_0 \end{cases} \tag{III.12}$$

Esto en cuanto a la propiedad del desplazamiento temporal, la propiedad del desplazamiento frecuencial se puede enunciar como:

$$\Im\{f(t)e^{+j\omega_0 t}\} = F(\omega - \omega_0) \tag{III.13}$$

En este caso la función temporal pasa a tener una expresión compleja.

III.2.4 Escalado Temporal y Frecuencial

La propiedad de escalado (ver Ilustración III-3) es:

$$\Im\{f(at)\} = \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right) \tag{III.14}$$

De esta forma si escalamos la función en el dominio del tiempo, contracción o expansión, se produce un escalado en dirección contraria en el dominio de la frecuencia. A su vez, la magnitud del espectro de frecuencia queda multiplicada por la misma constante que provoca el escalado temporal y frecuencial.

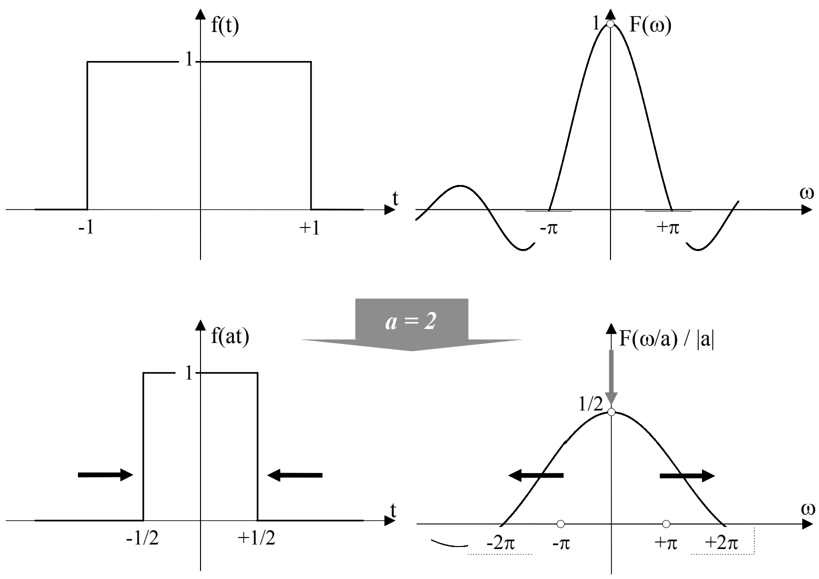


Ilustración III-3: Escalado de tiempo y frecuencia

Por ejemplo, cuando se reproduce un casete de audio a una velocidad superior que la normal (|a|>1), el sonido se vuelve más agudo por lo que el espectro de frecuencia se expande hacia las zonas de alta frecuencia. Todo lo contrario ocurre cuando se reproduce el mismo casete a una velocidad inferior a la normal (|a|<1), entonces el sonido se vuelve más grave, lo que indica que el espectro de frecuencia se contrae hacia el origen de frecuencias o frecuencias bajas.

III.2.5 Diferenciación e Integración

Esta propiedad se refiere al efecto de la integración y diferenciación sobre el espectro de frecuencia de una función cualquiera. En cuanto a la diferenciación se puede afirmar que:

$$\Im\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = j\omega F(\omega) \tag{III.15}$$

Es una propiedad muy útil, ya que estamos sustituyendo una operación de cierta complejidad, como es el cálculo de la derivada de una función, por la sencillez de una multiplicación. Puesto que la derivada está asociada con una multiplicación parece lógico pensar que el proceso de integración está asociado a una división por jω. Esto es bastante cierto, ya que:

$$\Im\left\{\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\,d\tau\right\} = \frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega) \tag{III.16}$$

donde el término en el que aparece el impulso unitario representa el efecto de la presencia de un nivel de continua en la función a la que se integra. Este nivel de continua provoca que la función integrada tienda a infinito cuando el tiempo tiende a infinito.

III.2.6 Dualidad

Si se comparan las expresiones de la Transformada de Fourier y su operación inversa se ven ciertas similitudes que nos llevan a la propiedad de dualidad, cuyo enunciado es:

$$\text{Si } \Im\{f(t)\} = F(\omega) \text{ entonces } \Im\{F(t)\} = 2\pi f(-\omega) \tag{III.17}$$

La propiedad de dualidad puede emplearse para la deducción de más propiedades de la Transformada de Fourier. Ya que si hay características temporales que tienen implicaciones en el dominio de la frecuencia, esas mismas características aplicadas al dominio frecuencial tienen análogas implicaciones en el dominio del tiempo. Por ejemplo, aplicando dualidad de la propiedad de diferenciación se llega a:

$$\Im\{-jtf(t)\} = \frac{dF(\omega)}{d\omega} \tag{III.18}$$

III.2.7 Teorema de Parseval

El contenido en energía de una función cualquiera se puede poner como:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2\,d\omega \tag{III.19}$$

Según este teorema, se puede calcular el contenido en energía de una función integrando directamente en el dominio de la frecuencia. Es por esto que $|F(\omega)|^2$ sea referido como espectro de densidad de energía de f(t).

III.2.8 Modulación de amplitud

La modulación de amplitud está relacionada con la variación de amplitud de una función sinusoidal (portadora) mediante otra función. Esto se puede expresar como:

$$f_m(t) = f(t)\cos\omega_p t \tag{III.20}$$

donde:

- f_m es la función modulada
- $\cos \omega_p t$ es la función sinusoidal cuya amplitud se modula y recibe el nombre de portadora
- ω_p es la frecuencia de la portadora
- f(t) es la función mediante la cual se modula la amplitud de la portadora, llamada también moduladora

La modulación desplaza al espectro de frecuencia de la moduladora (ver Ilustración III-4) a ambos lados de la portadora, es decir:

$$F_m(t) = \Im\{f_m(t)\} = \tfrac{1}{2}F(\omega - \omega_p) + \tfrac{1}{2}F(\omega + \omega_p) \tag{III.21}$$

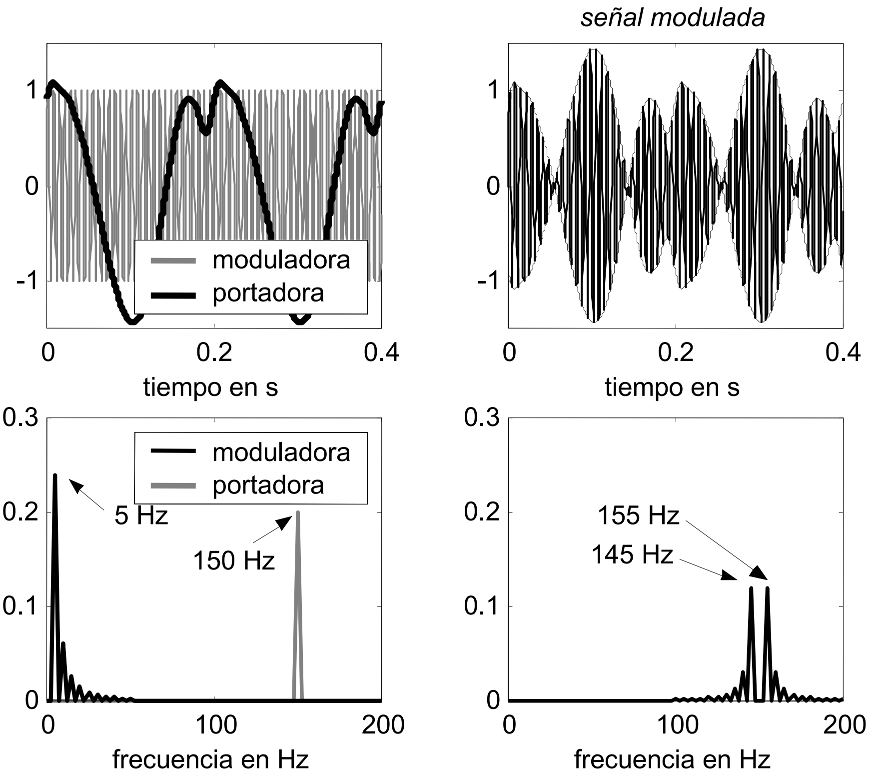


Ilustración III-4: Resultado de la modulación de una onda sinusoidal de 150 Hz (portadora) mediante una onda periódica de 5 Hz (moduladora)

Esta propiedad se utiliza en las transmisiones de radio de AM[1]. El proceso podría ser el que se muestra en la Ilustración III-5. En primer lugar se transforman las ondas sonoras en señales eléctrica, empleando por ejemplo un micrófono. Estas señales tienen un rango de frecuencia entre 10 Hz y 20 kHz. A continuación dicha señal se multiplica por una señal con los suficientes kilohercios, por ejemplo 1024 kHz, como para que la onda resultante tenga una buena propagación a través de la atmósfera. De esta forma, las señales de sonido hacen las veces de moduladora y la señal de alta frecuencia hace las veces de portadora.

[1] AM son la siglas de Amplitud Modulada.

La onda así modulada tiene un espectro de frecuencia de 1024 kHz ± (10Hz ÷ 20kHz). Para realizar el proceso inverso en el receptor, demodulación, se vuelve a multiplicar por la portadora.

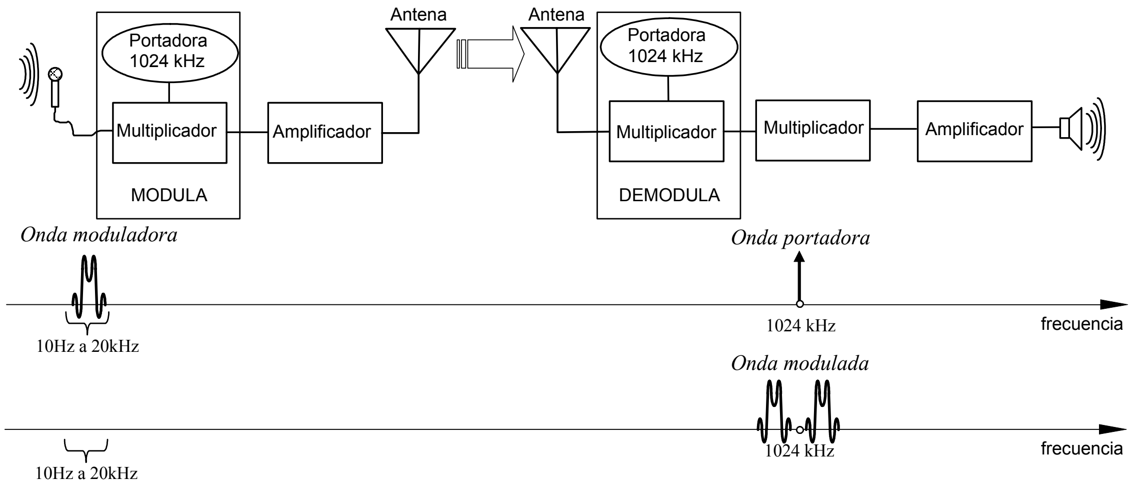


Ilustración III-5: Esquema simplificado de la emisión y recepción de la AM

III.3 La Integral de Convolución

Se define la convolución como la integral:

$$f(t)*g(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau \qquad \text{(III.22)}$$

El cálculo de esta integral se puede hacer en 3 pasos representados en la Ilustración III-6 y descritos a continuación:

Paso nº 1: Cálculo de f(-τ). Para ello se calcula la función simétrica de f(t) con respecto al eje de ordenadas.

Paso nº 2: Se procede a desplazar la función recién calculada un valor t, y así se obtiene $f(t-\tau)$. Si t es positivo el desplazamiento es hacia la derecha, y en caso contrario hacia la izquierda.

Paso nº 3: Se realiza el producto de la función a la que se han aplicado los dos pasos anteriores con la otra función. Una vez hecho esto se calcula el área en función del desplazamiento t y el resultado es precisamente la integral de convolución.

Las principales propiedades en cuanto a la integral de convolución son:

- Conmutativa: $f(t)*g(t)=g(t)*f(t)$
- Asociativa: $f(t)*\left[g(t)*h(t)\right]=\left[f(t)*g(t)\right]*h(t)$
- Distributiva: $f(t)*\left[g(t)+h(t)\right]=f(t)*g(t)+f(t)*h(t)$

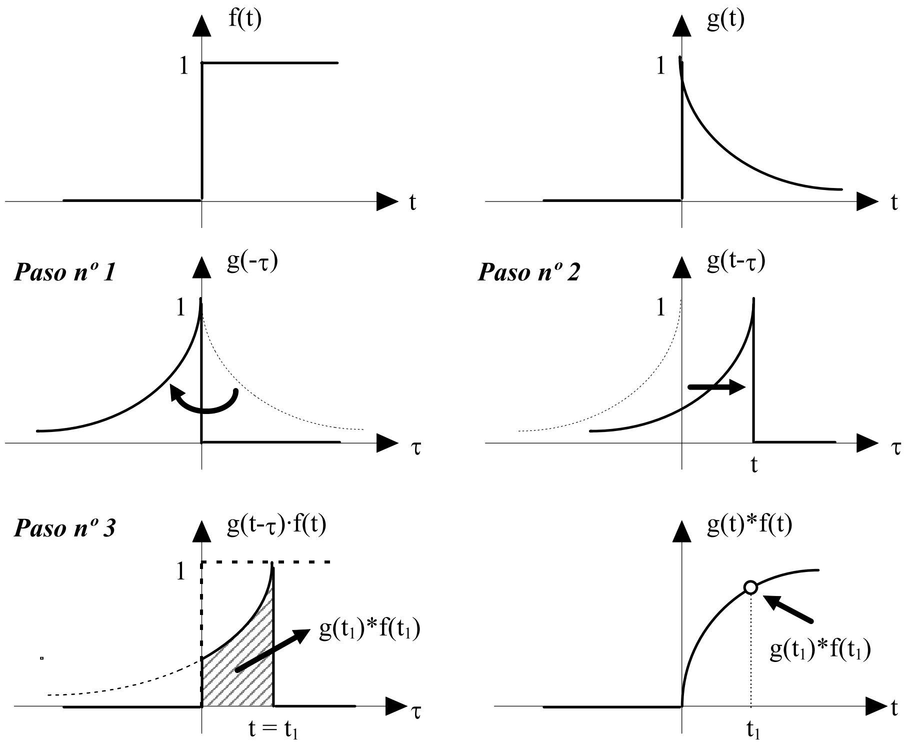


Ilustración III-6: Cálculo de la Integral de Convolución.

III.3.1 Convolución con la función Impulso

La convolución de una función cualquiera con un impulso unitario, consiste en desplazar el origen de dicha función al lugar en donde se encuentra el impulso. O sea:

$$f(t) * \delta(t - t_0) = f(t - t_0) \tag{III.23}$$

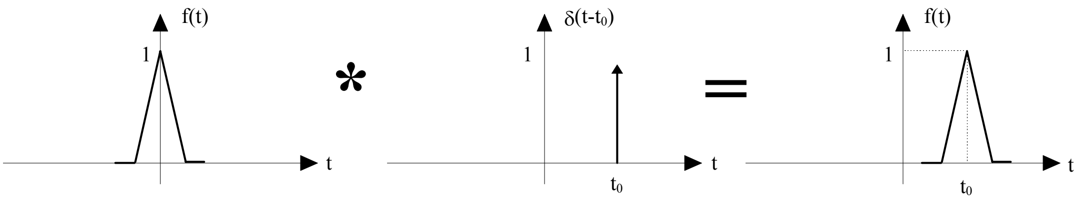


Ilustración III-7: Convolución con un Impulso.

Si una de la funciones es un tren de impulsos, entonces:

$$f(t) * \delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f(t - nT) \tag{III.24}$$

De esta forma a partir de la función aperiódica f(t) se construye la función periódica $f(t)*\delta_T(t)$.

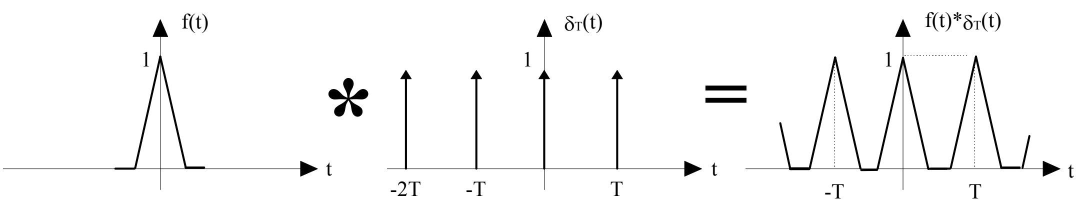


Ilustración III-8: Convolución con un tren de impulsos.

III.3.2 Teorema de Convolución

La transformada de la convolución de dos funciones es el producto de sus transformadas de Fourier:

$$f(t) * g(t) \xrightarrow{\Im} F(\omega)G(\omega) \qquad \text{(III.25)}$$

Esta propiedad es de gran utilidad para el cálculo de la Transformada de Fourier, como por ejemplo en el cálculo de la Transformada de Fourier de una señal periódica.

III.3.3 Teorema de Modulación

Este teorema es el dual del anterior, y afirma que la Transformada de Fourier del producto de dos funciones es proporcional a la convolución de sus transformadas, esto es:

$$f(t)g(t) \xrightarrow{\Im} \frac{1}{2\pi} F(\omega) * G(\omega) \qquad \text{(III.26)}$$

III.4 Convergencia de la Transformada de Fourier

Aunque en la explicación de la obtención de la Transformada de Fourier se ha supuesto que la función objeto de estudio f(t) es de duración finita, la ecuación ligada a la Transformada de Fourier tiene validez para una gran cantidad de funciones de duración infinita. De hecho, el método escogido para ver el origen de la Transformada de Fourier desde la Serie de Fourier, sugiere la existencia de unas condiciones que garanticen la existencia de la Transformada de Fourier. Es de interés conocer cuando una señal obtenida a través de la Transformada de Fourier es una buena aproximación de la función original. Por ejemplo, en la secuencia de operaciones: $f(t) \xrightarrow{\Im} F(\omega) \xrightarrow{\Im^{-1}} f_{TF}(t)$ es necesario determinar en qué condiciones se puede afirmar que $f(t) \cong f_{TF}(t)$. Para que esta igualdad se verifique es necesario que exista la transformada inversa de Fourier, lo que implica que se cumpla la igualdad:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| f(t) \right|^2 dt < \infty \qquad \text{(III.27)}$$

Una vez garantizada la existencia de Transformada de Fourier se puede demostrar que aunque f(t) y $f_{TF}(t)$ tengan valores distintos en algunos puntos (p.e. discontinuidades), si es cierto que la energía de este error ε(t) es cero, y por lo tanto las dos funciones serán consideradas como iguales. La expresión que refleja esta condición es:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \varepsilon(t) \right|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| f(t) - f_{TF}(t) \right|^2 dt = 0 \qquad \text{(III.28)}$$

Al igual que ocurría en el estudio de las funciones periódicas existe un conjunto alternativo de condiciones que garantizan que f(t) es igual a $f_{TF}(t)$ en todos los puntos en los que no hay discontinuidades. En las discontinuidades se verifica la igualdad:

$$f_{TF}(t) = \frac{f(t_0^-) + f(t_0^+)}{2} \qquad \text{(III.29)}$$

donde t_0 es el instante en el que hay una desigualdad y t_0^- es el valor de la función acercándose por la izquierda de la discontinuidad, y t_0^+ es el valor de la función acercándose por la derecha a la discontinuidad. Este conjunto alternativo de condiciones son también llamadas de Dirichlet y requieren que:

- La función f(t) ha de ser absolutamente integrable, o sea, $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt < \infty$
- La función f(t) ha de tener un número finito de máximos y mínimos dentro de cualquier intervalo finito.
- La función f(t) ha de tener un número finito de discontinuidades dentro de cualquier intervalo finito. Además estas discontinuidades han de suponer un salto de amplitud finita.

Todas las condiciones hasta ahora definidas están dando un conjunto de condiciones suficientes para la existencia de Transformada de Fourier, sin embargo son condiciones no necesarias. Por ejemplo, un tren de impulsos unitarios sí tiene Transformada de Fourier y no cumple las anteriores condiciones.

III.5 Transformada de Fourier de Funciones Especiales

En este apartado se verán algunas de las funciones más utilizadas en el análisis de Fourier, que en cambio no tienen una Transformada de Fourier evidente.

III.5.1 Transformada de Fourier de un impulso

Se puede demostrar que la Transformada de Fourier de un impulso unitario es la unidad, o lo que es lo mismo:

$$\delta(t) \xrightarrow{\Im} 1 \qquad \text{(III.30)}$$

Si se aplica el teorema de Parseval al resultado, se observa que el espectro de energía es constante para todas las frecuencias, y por lo tanto, su energía es infinita. He aquí la razón de la no existencia de los impulsos unitarios en los sistemas físicos, se necesita energía infinita para poder generarlos. Derivadas de esta Transformada de Fourier hay una serie de propiedades, o de transformadas que deben ser consideradas:

- $\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} dt$
- $\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{+\infty} \cos \omega t \, dt$
- $\delta(t - t_0) \xrightarrow{\Im} e^{-j\omega_0 t}$
- $K \xrightarrow{\Im} 2\pi K \delta(\omega)$, obtenida por dualidad y que indica que un nivel de continua está asociado a un pulsos en el origen, donde δ(ω) es además una función par.

III.5.2 Transformada de Fourier del seno y del coseno

Estos dos transformadas son:

$$\cos \omega_0 t \xrightarrow{\Im} \pi\left[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)\right] \qquad \text{(III.31)}$$

$$\operatorname{sen} \omega_0 t \xrightarrow{\Im} \frac{\pi}{j}\left[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)\right] \qquad \text{(III.32)}$$

III.5.3 Transformada de Fourier del escalón unitario

En este caso la Transformada de Fourier es:

$$u(t) \xrightarrow{\Im} \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \qquad \text{(III.33)}$$

III.5.4 Transformada de Fourier de un tren de impulsos

El tren de impulsos se ha definido como $\delta_T(\omega)$. Su Transformada de Fourier tiene la particularidad de que también es periódica, solo que en el dominio de la frecuencia. Y su período de oscilación es de precisamente la frecuencia del tren de impulsos temporal. O sea:

$$\delta_T(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \xrightarrow{\Im} \omega_0 \delta_{\omega_0}(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{T} n\right) \qquad \text{(III.34)}$$

III.5.5 Señales Periódicas y la Transformada de Fourier

III.5.5.1 De la Serie de Fourier a la Transformada

Al empezar a estudiar la Transformada de Fourier se partió de una función periódica en la que el período se hacía tender hacia infinito. Ahora lo que se pretende es encontrar la relación existente entre la Transformada de Fourier de uno de los períodos de la señal y la Serie de Fourier de la función periódica.

Sea la función periódica $f_p(t)$ de período T (ω_0=2π/T). A partir de ella se puede obtener una función no periódica mediante la expresión:

$$f(t) = \begin{cases} f_p(t) & -T/2 < t < +T/2 \\ 0 & t < -T/2 \ \text{ o } \ t > T/2 \end{cases} \qquad \text{(III.35)}$$

Los coeficientes de la Serie de Fourier para la función periódica son:

$$d_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f_p(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} f_p(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \qquad \text{(III.36)}$$

donde los valores d_n son los coeficientes de la Serie de Fourier.
De esta forma se alcanza el resultado:

$$d_n = F(n\omega_0)/T \qquad \text{(III.37)}$$

donde F(ω) es la Transformada de Fourier de la función aperiódica f(t).

Se obtendría el mismo resultado cualquiera que fuese el intervalo de duración T_0 que se escoja como representativo de un período de la función. Y aunque, efectivamente sus Transformadas de Fourier sean distintas no lo serán los correspondientes coeficientes. Por ejemplo se puede elegir la función:

$$g(t) = \begin{cases} f_p(t) & 0 < t < T \\ 0 & t < 0 \ \text{ ó } \ t > T \end{cases} \qquad \text{(III.38)}$$

De esta forma, es evidente que f(t) y g(t) son funciones distintas, y, por lo tanto, F(ω) y G(ω) también lo son. Lo que sí se puede demostrar es que coinciden en los múltiplos de la frecuencia de la fundamental, o sea: $F(n\omega_0) = G(n\omega_0)$ ya que la descomposición en Serie de Fourier de $f_p(t)$ es única.

III.5.5.2 Transformada de Fourier de Funciones Periódicas.

Si se descompone una función periódica en una Serie de Fourier se llega a una expresión del tipo:

$$f_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n e^{jn\omega_0 t} \tag{III.39}$$

Se puede aplicar la Transformada de Fourier a los dos miembros de la igualdad de forma que:

$$F_p(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2\pi d_n \delta(\omega - n\omega_0) \tag{III.40}$$

Esta expresión indica que la Transformada de Fourier de una función periódica es un tren de impulsos modulado en amplitud, de forma que el área de esos impulsos son los coeficientes de la Serie de Fourier multiplicadas por 2π.

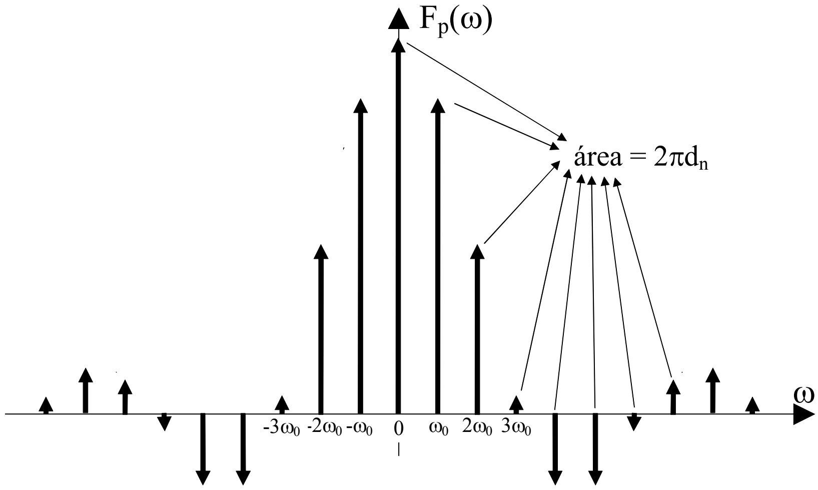


Ilustración III-9: Transformada de Fourier de una función periódica.

A este resultado se puede llegar además, tomando la función periódica como convolución entre una señal aperiódica y un tren de impulsos unitarios. De esta forma:

$$f_p(t) = f(t) * \delta_{T_0}(t) \xrightarrow{\Im} F_p(\omega) = F(\omega) \cdot \omega_0 \delta_{\omega_0}(\omega) \tag{III.41}$$

donde f(t) es una función aperiódica cuya convolución con un tren de impulsos unitarios da lugar a la función periódica $f_p(t)$ y a su correspondiente Transformada de Fourier $F(\omega)$. Y como $F(\omega)$ es la calculada como en (III.37), se llega a la expresión para $F_p(\omega)$ mostrada en (III.40).

IV. Sistemas muestreados

IV.1 Filtro ideal y señales de banda limitada

IV.1.1 Filtro ideal

El proceso por el cual una determinada señal es modificada de forma que se atenúa o elimina una parte de su espectro de frecuencia se denomina filtrado, y al sistema que realiza dicha acción se le llama filtro. El rango de frecuencias atenuadas o filtradas es lo que se conoce como banda de rechazo, mientras que las restantes forman lo que se llama banda de paso. En función de como sea la banda de paso se pueden definir los siguientes tipos de filtro:

- Filtro paso-bajo, cuando se atenúan todas las frecuencias por encima de una dada
- Filtro paso-alto, cuando se atenúan todas las frecuencias por debajo de una dada
- Filtro paso-banda, cuando se atenúan todas las frecuencias que no estén entre dos valores dados
- Filtro rechazo-banda, cuando se atenúan todas las frecuencias que estén entre dos valores dados

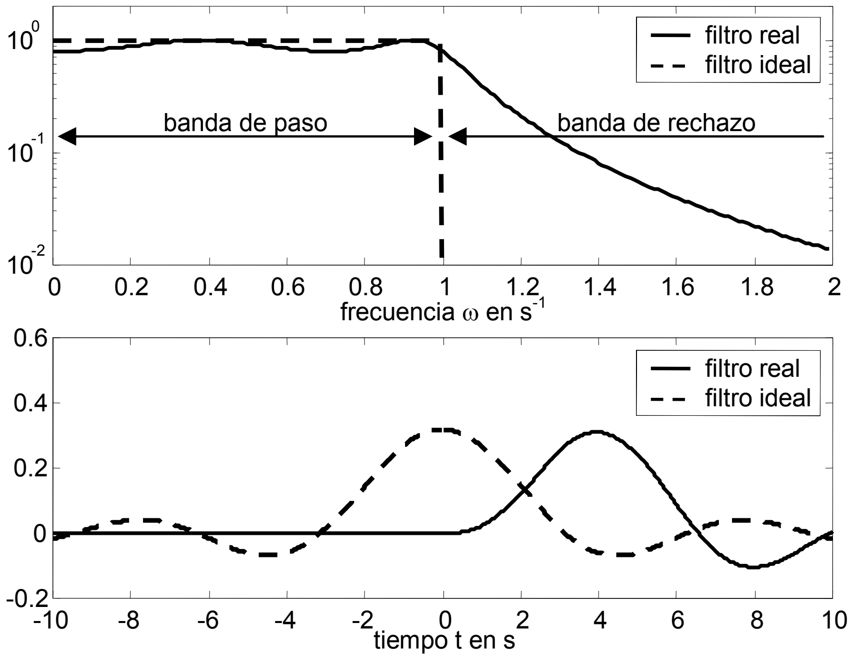


Ilustración IV-1: Caracterización en el dominio de la frecuencia y respuesta temporal a un impulso unitario de un filtro paso-bajo ideal y uno no-ideal tipo Chebyshev

Por otra parte, se dice que un filtro ideal es aquel que elimina por completo (atenuación infinita) las componentes de frecuencia que pertenezcan a la banda de rechazo, mientras que el espectro restante o banda de paso queda inalterado (atenuación nula). Uno de los filtros ideales más empleados en la teoría de Fourier es el filtro paso-bajo ideal (ver Ilustración IV-1), cuyo comportamiento en el dominio de la frecuencia es:

$$Q(\omega) = \begin{cases} 0 & |\omega| > \omega_c \\ 1 & |\omega| \leq \omega_c \end{cases} \tag{IV.1}$$

donde ω_c es la denominada frecuencia de corte, y representa la transición entre la banda de paso y la banda de rechazo. La respuesta a un impulso unitario del filtro (ver apartado VIII.3) recién descrito es:

$$q(t) = (\omega_c \operatorname{sen} \omega_c t)/2\pi\omega_c t \tag{IV.2}$$

Los filtros ideales son funciones no causales[1], y por lo tanto no realizables físicamente, ya que su respuesta a un impulso unitario (ver Ilustración IV-1) no es cero para los instantes de tiempo menores que cero. Por consiguiente, en aquellas aplicaciones es las que se necesite hacer un filtrado en tiempo real es necesario emplear filtros causales. Una de las peculiaridades más relevantes de este tipo de filtros es que la transición entre la banda de paso y la de rechazo es gradual (ver Ilustración IV-1). Son, por consiguiente, filtros no-ideales, con una atenuación finita en la banda de rechazo y una atenuación no nula en la banda de paso.

IV.1.2 Señales de banda limitada

Una señal se dice de banda limitada cuando su espectro de frecuencia se anula a partir de un determinado valor. Si dicha señal es real, esto quiere decir que su transformada de Fourier cumple que:

$$F(\omega) = 0 \quad \text{para} \quad |\omega| > \omega_c \tag{IV.3}$$

donde a ω_c se le denomina ancho de banda.

La condición de que una señal sea de banda limitada implica que en el dominio temporal toma valores entre $-\infty$ y $+\infty$, esto es, que no existe un valor T_c tal que $f(t) = 0$ para $t>T_c$. Esta afirmación tiene su dual, de forma que una señal limitada en el tiempo ($T_c < \infty$) tiene un ancho de banda infinito, esto es, toma valores en todo el espectro de frecuencia.

A pesar de estas afirmaciones, para todas las señales reales relacionadas con procesos físicos se cumple que:

$$\lim_{\omega \to \infty} F(\omega) = 0 \tag{IV.4}$$

Por lo que en la práctica, es siempre posible establecer una frecuencia ω_c lo suficientemente elevada como para que se cumpla que: $F(\omega) \approx 0 \;\text{ para }\; |\omega| > \omega_c$

IV.2 Muestreo de señales

En los capítulos anteriores se ha visto la Transformada de Fourier de señales continuas y de trenes de impulsos. Una aplicación directa de estos resultados es la Transformada de Fourier de señales muestreadas.

Si se tiene una función f(t) continua en t = T (ver Ilustración IV-2), una muestra de f(t) en ese instante viene dada por:

$$\hat{f}(t) = f(t)\delta(t-T) = f(T)\delta(t-T) \tag{IV.5}$$

Donde se obtiene un impulso en el instante t = T, cuya área es precisamente f(T). Si en vez de aplicar un impulso para obtener una muestra, se emplea un tren de impulsos de período T, siendo f(t) continua en los instantes f(nT), entonces:

$$\hat{f}(t) = f(t)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT)\delta(t-nT) \tag{IV.6}$$

[1] Su respuesta a un impulso tiene valores distintos de cero para t < 0 (ver capítulo VIII)

El resultado es una señal muestreada, $\hat{f}(t)$, consistente en un tren de impulsos cuya área es precisamente el valor de la señal original en el instante en el que se produce el impulso. La frecuencia de muestreo es $\omega_m = 2\pi/T$, siendo T el período del tren de impulsos.

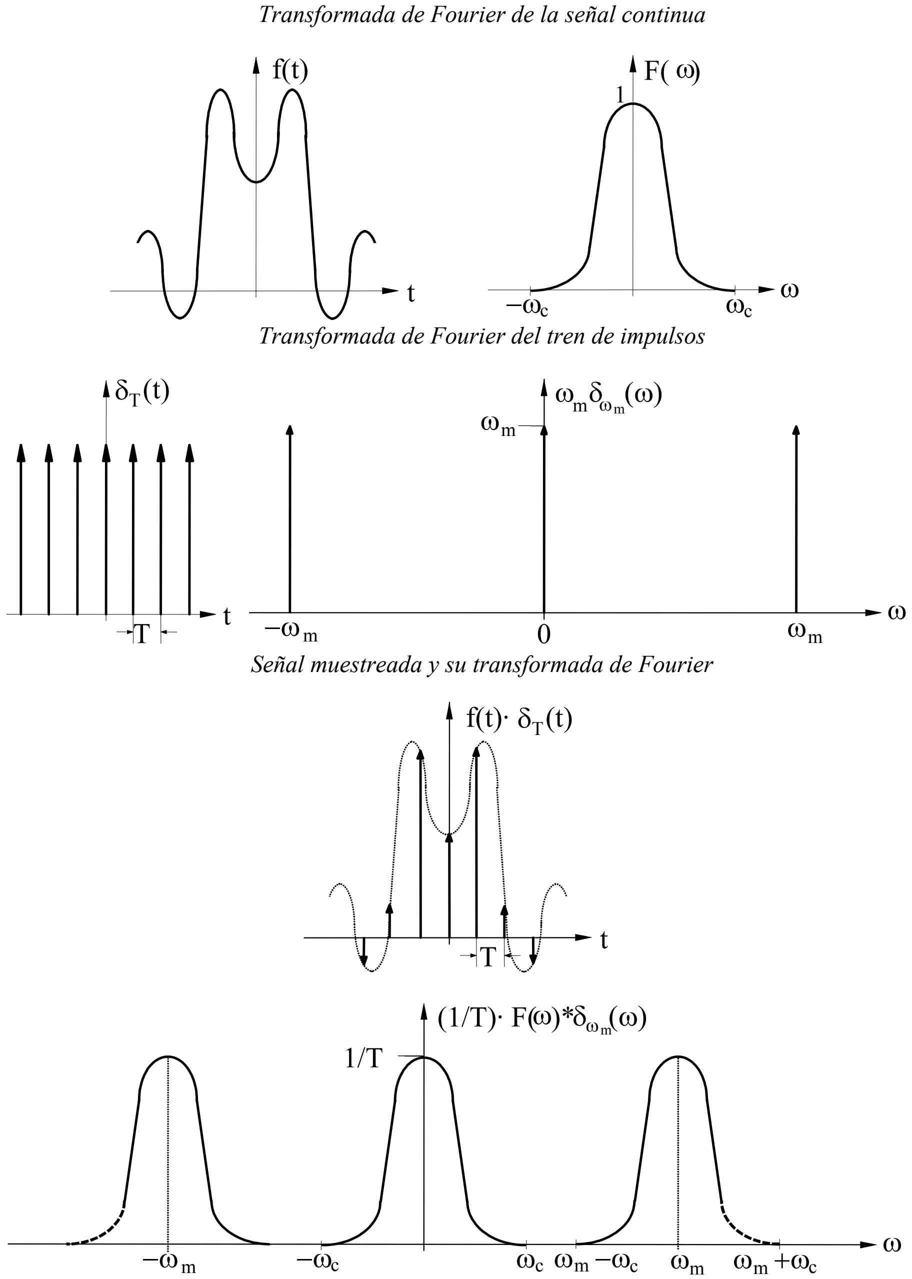


Ilustración IV-2: El efecto del muestreo

Para ver el efecto del muestreo se esudian las operaciones anteriores en el dominio de la frecuencia. Entonces, sabiendo que la función muestreada se puede poner como:

$$\hat{f}(t) = f(t) \cdot \delta_T(t) \qquad \text{(IV.7)}$$

Si se pasan al dominio de la frecuencia todas las funciones que intervienen en la igualdad anterior:

$$\hat{F}(\omega) = \Im\{\hat{f}(t)\} \quad F(\omega) = \Im\{f(t)\} \quad \Im\{\delta_T(t)\} = \omega_m \delta_{\omega_m}(\omega) \qquad \text{(IV.8)}$$

Ya en el dominio de la frecuencia y por la propiedad de modulación:

$$\hat{F}(\omega) = \Im\left\{\hat{f}(t)\right\} = \Im\left\{f(t)\cdot\delta_T(t)\right\} = \frac{1}{2\pi}\left[F(\omega)*\left(\omega_m\cdot\delta_{\omega_m}(\omega)\right)\right] \quad \text{(IV.9)}$$

Por la tanto la Transformada de Fourier de una señal muestreada con un período T (con $T = 2\pi/\omega_m$) es:

$$\hat{F}(\omega) = \frac{1}{T}F(\omega)*\delta_{\omega_m}(\omega) \quad \text{(IV.10)}$$

El resultado, ver Ilustración IV-2, es una función periódica en el dominio de la frecuencia, de período igual a la frecuencia de muestreo (ω_m), en la que la parte correspondiente a un período es precisamente la Transformada de Fourier de la señal continua multiplicada por una constante ($1/T$).

Si se escoge un período de muestreo demasiado largo (menor ω_m), entonces los impulsos de $\delta_{\omega_m}(\omega)$ se vuelven más cercanos y hay solapamiento entre los diferentes períodos de la señal en el dominio de la frecuencia, tal y como se muestra en la Ilustración IV-3. Es el fenómeno conocido como "aliasing" o solapamiento. Para que a la hora de realizar el muestreo no se produzca este solapamiento, tenemos que muestrear la señal continua f(t) con frecuencia suficientemente elevada (o con un período suficientemente corto), de forma que:

$$\omega_m \geq 2\cdot\omega_c \quad \text{(IV.11)}$$

donde ω_c es la frecuencia máxima en el espectro de frecuencia para la señal continua f(t).

La frequencia mímima para el muestreo, $2\omega_c$ en (IV.11), recibe el nombre de frecuencia de Nyquist.

La ausencia del fenómeno de "aliasing" es muy importante, ya que permite conocer la Transformada de Fourier de una señal y, por lo tanto, reconstruirla sin necesidad de conocer todos sus puntos.

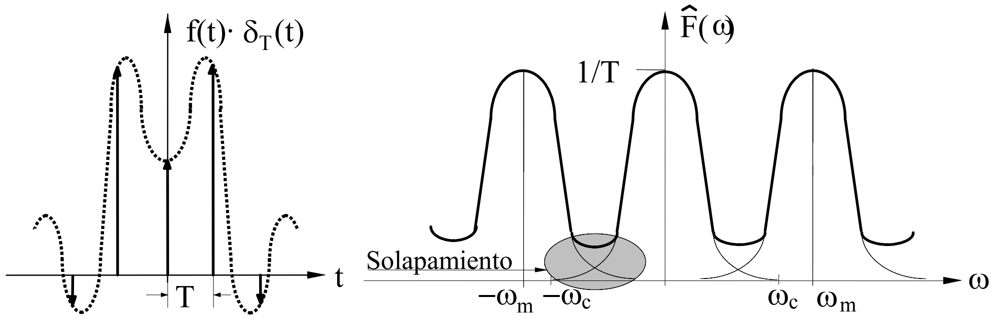


Ilustración IV-3: Fenómeno de "Aliasing" o solapamiento

IV.3 Teorema de muestreo

El teorema de muestreo afirma que si una función f(t) es de banda limitada, entonces la función continua f(t) puede ser unívocamente determinada a partir del conocimiento de sus muestras:

$$\hat{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT)\delta(t-nT) \quad \text{(IV.12)}$$

En particular, f(t) está dada por:

$$f(t) = T\cdot\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT)\frac{\sin\left[\frac{\omega_m}{2}(t-nT)\right]}{\pi(t-nT)} \quad \text{(IV.13)}$$

Los requisitos para el teorema de muestreo son:

- $F(\omega)$ sea de banda limitada, o sea que: $F(\omega) = 0$ para $|\omega| > \omega_c$
- La frecuencia de muestreo ha de ser superior al doble de la frecuencia máxima del espectro frecuencial de la señal continua ($\omega_m \geq 2\omega_c$). O lo que es lo mismo, el período de muestreo (T) ha de ser inferior a π/ω_c. Este espaciado asegura que al realizar la convolución entre $\delta_{\omega m}(\omega)$ y $F(\omega)$ no se produzca solapamiento

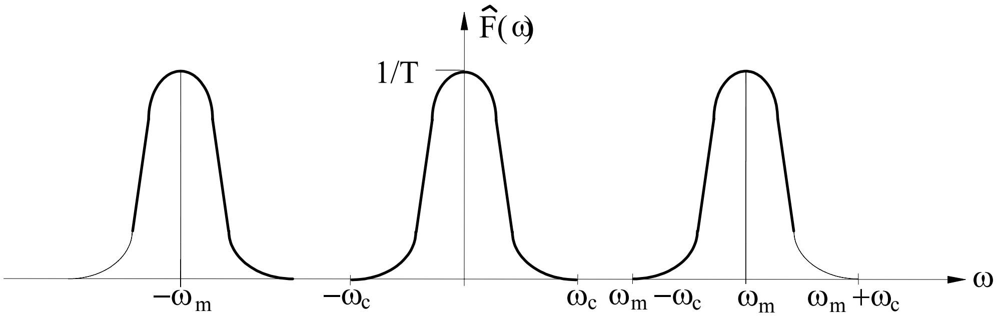
En este momento, partiendo de la señal muestreada se mostrarán los pasos a seguir para reconstruir la señal original (ver Ilustración IV-4). Se sabe que la transformada de la señal continua se puede obtener multiplicando la transformada del filtro paso-bajo ideal, que permita el paso de las frecuencias entre $-\omega_m/2$ y $\omega_m/2$, por la transformada de la señal muestreada, de forma que:

$$F(\omega) = \hat{F}(\omega) \cdot Q(\omega) \quad f(t) = \Im^{-1}\{F(\omega)\} = \hat{f}(t) * q(t) \tag{IV.14}$$

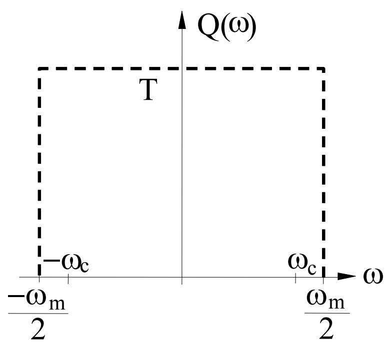
donde:

- $Q(\omega)$ es la transformada del filtro ideal y $\Im^{-1}\{Q(\omega)\} = q(t) = T\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\omega_m t\right)/\pi t$
- $\hat{F}(\omega)$ es la transformada de la señal muestreada cuya correspondiente función temporal es: $\Im^{-1}\{\hat{F}(\omega)\} = \hat{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT)\delta(t - nT)$

Transformada de Fourier de la señal muestreada



Filtro ideal



Aplicación del filtro a la señal muestreada

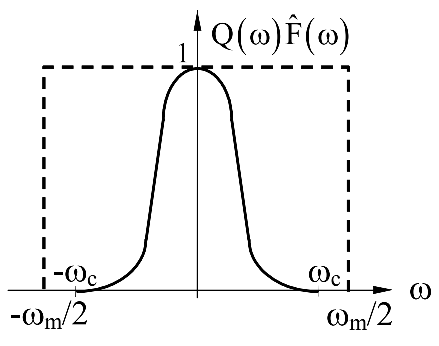


Ilustración IV-4: Reconstrucción de la señal muestreada

Entonces, aplicando las propiedades de la Transformada de Fourier de la convolución de dos funciones:

$$f(t) = \Im^{-1}\{\hat{F}(\omega) \cdot Q(\omega)\} = \hat{f}(t) * q(t) = \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT)\delta(t - nT)\right] * T\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\omega_m t\right)}{\pi t} \tag{IV.15}$$

Por lo tanto la función que nos da la reconstrucción de f(t), tal y como se puede ver en la Ilustración IV-5, a partir de sus muestras es la mostrada en (IV.13).

El teorema de muestreo nos da las condiciones mínimas teóricas para la reconstrucción de una señal, ahora se tendría que diseñar el filtro que lo consiga y esto no siempre es posible.

La condición de que f(t) sea de banda limitada raramente se puede cumplir en la práctica. Entonces la frecuencia escogida para el muestreo es aquella para la que el efecto de aliasing puede considerarse despreciable. Adicionalmente, para evitar el solapamiento, se puede aplicar un filtro paso-bajo a la señal como paso previo a su muestreo. De esta forma, en la señal resultante se puede calcular la frecuencia mínima para el muestro o de Nyquist. Con este método, aunque no se puedan analizar las frecuencias anuladas o atenuadas por el filtro, las que sí deja pasar no tienen errores debidos al "aliasing".

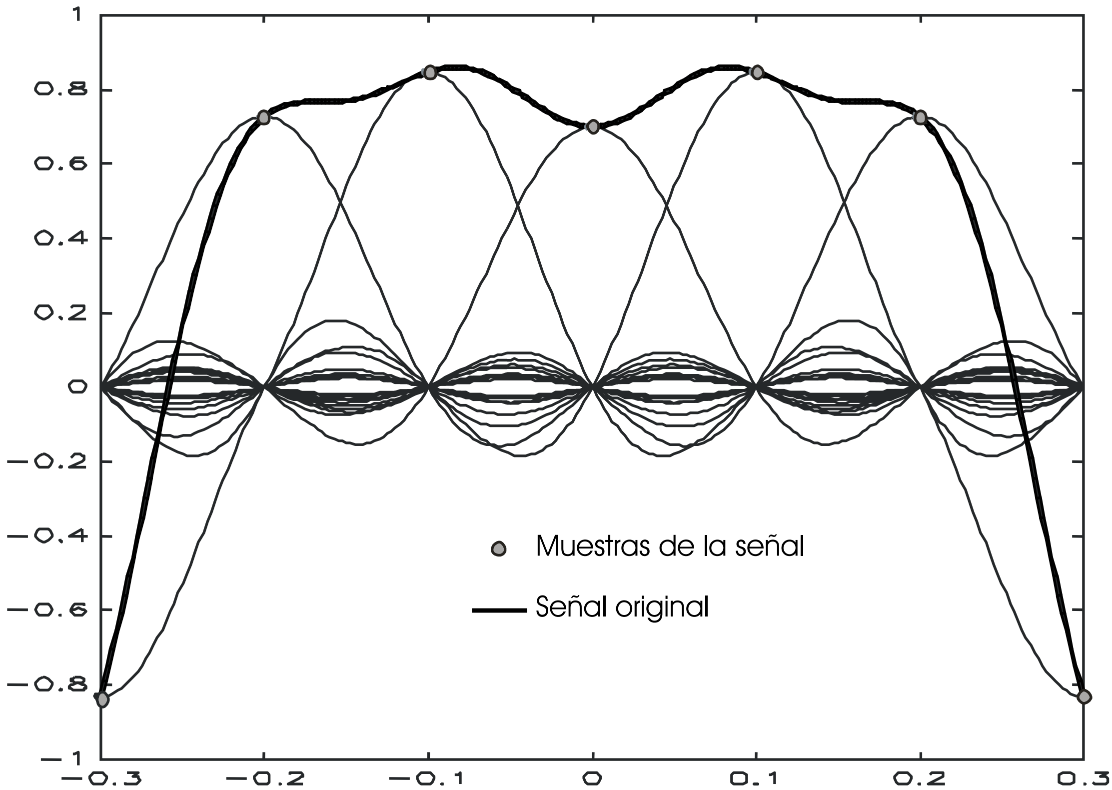


Ilustración IV-5: Reconstrucción de una señal mediante un filtro ideal

IV.4 El efecto del "aliasing"

Una muestra de cómo se manifiesta el "aliasing" durante el muestreo es lo que se conoce como efecto estroboscópico. Este efecto se consigue, por ejemplo, al iluminar con una luz que parpadea a un disco rotatorio que tiene una franja dibujada (ver Ilustración IV-6). Esta es una forma visual de tomar muestras de la rotación del disco.

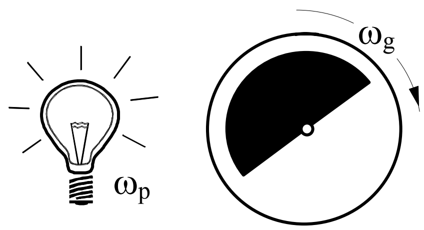


Ilustración IV-6: Efecto estroboscópico

Si la frecuencia del parpadeo de la luz es mucho mayor que la velocidad de giro del disco ($\omega_p >> \omega_g$), entonces la velocidad y sentido de rotación del disco son percibidos correctamente. Por otra parte, cuando la frecuencia de parpadeo es menor que la mitad de la velocidad de giro

($\omega_p < 2\omega_g$) entonces la velocidad del disco y la percibida son distintas, vemos al disco girar con menor velocidad que la que realmente tiene. En el extremo en que las velocidades de parpadeo y giro se igualen ($\omega_p = \omega_g$), estamos iluminando al disco una vez en cada vuelta, de forma que nos parece que el disco está quieto, ya que vemos a la franja siempre en la misma posición. Si bajamos más la frecuencia incluso nos puede parecer que gira en un sentido distinto al real.

En algunos equipos de sonido, como tocadiscos y casetes, se aprovecha el fenómeno estroboscópico para ajustar al velocidad de giro del motor de arrastre aprovechando la fluctuación de la luz eléctrica (2·50Hz).

A modo de ejemplo, se va a analizar el efecto del "aliasing" cuando se muestrea una señal sinusoidal: $f(t) = \cos(\omega_0 t)$, representada en la Ilustración IV-7. Entonces, según la frecuencia de muestreo empleada:

- Para $\omega_m > 2\omega_0$, la señal reconstruida mediante un filtro paso-bajo ideal, a partir de la muestrada $f_m(t)$, es precisamente la señal original, o sea (ver Ilustración IV-8): $f_r(t) = f(t) = \cos(\omega_0 t)$
- Para $\omega_m < 2\omega_0$ la señal reconstruida (ver Ilustración IV-9) es: $f_r(t) = \cos(\omega_m - \omega_0)t$. En esta situación la frecuencia de la señal reconstruida ω_m-ω_0 es distinta de la señal original ω_0, debido precisamente a una insuficiente frecuencia de muestreo.
- Para $\omega_m = \omega_0$, que es un caso particular del anterior, la señal reconstruida (Ilustración IV-10) es una constante: $f_r(t) = K$

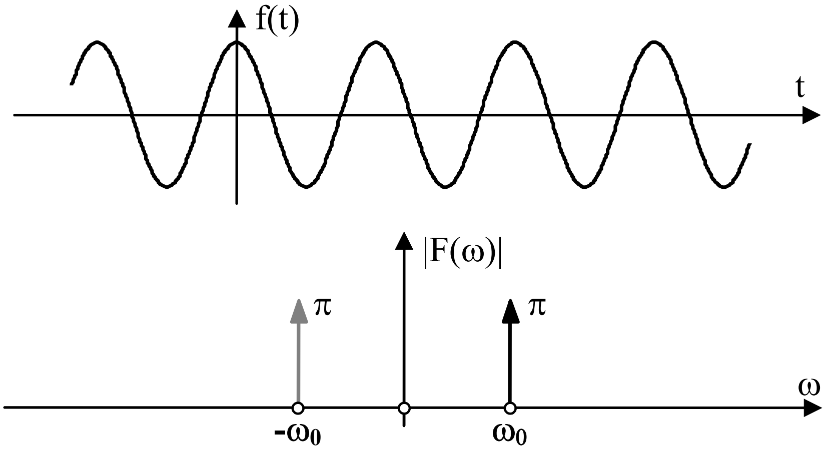


Ilustración IV-7:Señal continua sin muestreo

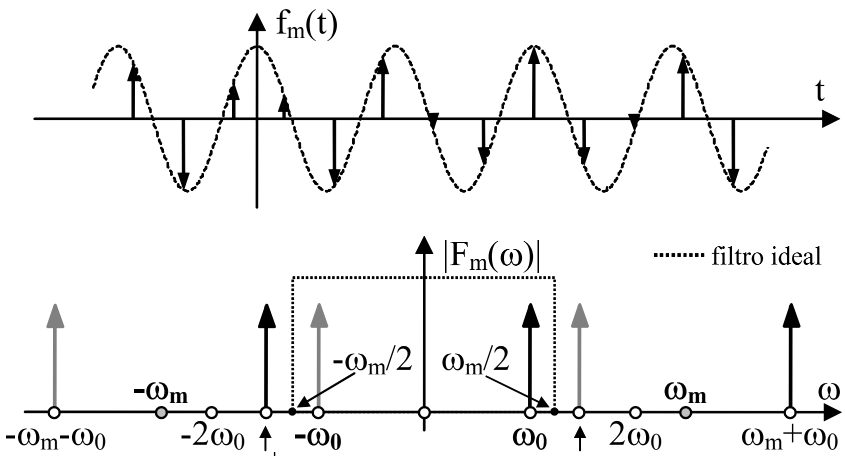


Ilustración IV-8: Muestreo de señal con $\omega_m > 2 \cdot \omega_0$

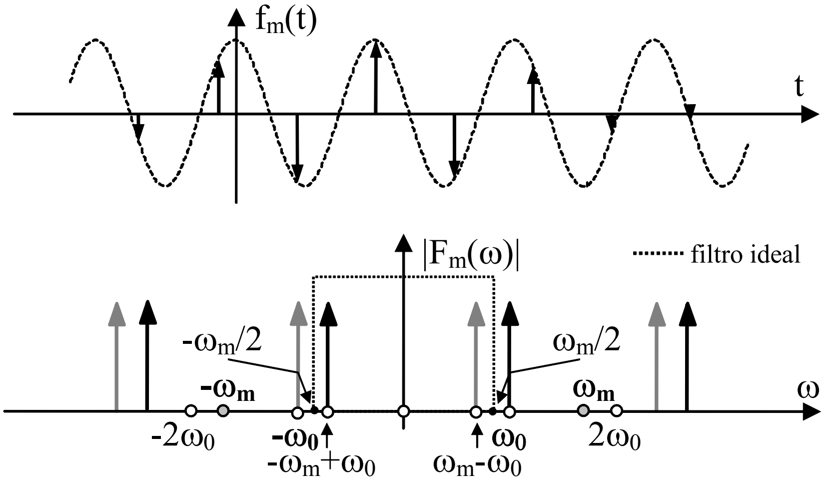


Ilustración IV-9: Muestreo de señal con $\omega_m < 2\,\omega_0$

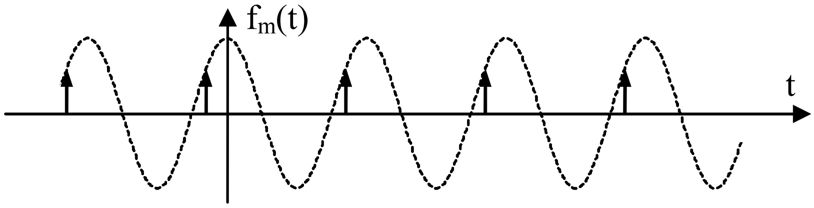


Ilustración IV-10: Muestreo de señal con $\omega_m = \omega_0$

En el caso del fenómeno estroboscópico, el filtro correspondiente para la reconstrucción de la señal muestreada viene dado por la percepción humana del parpadeo, ya que el ser humano no es capaz de reconocer parpadeos superiores a los 24Hz, por encima estas frecuencias vemos un nivel continuo de luminosidad.

IV.5 Muestreo con mantenedor de orden cero

Los impulsos resultantes del muestreo de una señal no se pueden generar por la concentración de energía que tienen. Suele ser más conveniente emplear para el muestreo un mantenedor de orden cero, el cual actúa manteniendo la muestra del instante anterior hasta el siguiente instante de muestreo (ver Ilustración IV-11).

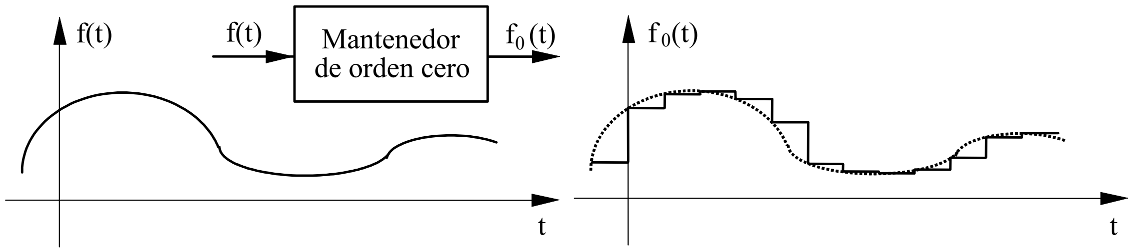


Ilustración IV-11: Efecto del mantenedor de orden cero

La reconstrucción de la señal original f(t) puede conseguirse mediante la aplicación de un filtro paso bajo a la señal muestreada $f_0(t)$. Para estudiar el comportamiento del mantenedor lo veremos como un muestreo mediante un tren de impulsos, seguido de un sistema lineal invariante con respuesta impulsional rectangular causal $h_0(t)$ (ver Ilustración IV-12 e Ilustración IV-13).

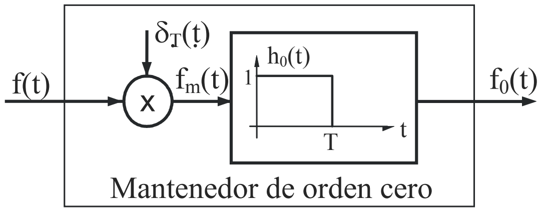


Ilustración IV-12: Descomposición del mantenedor de orden cero

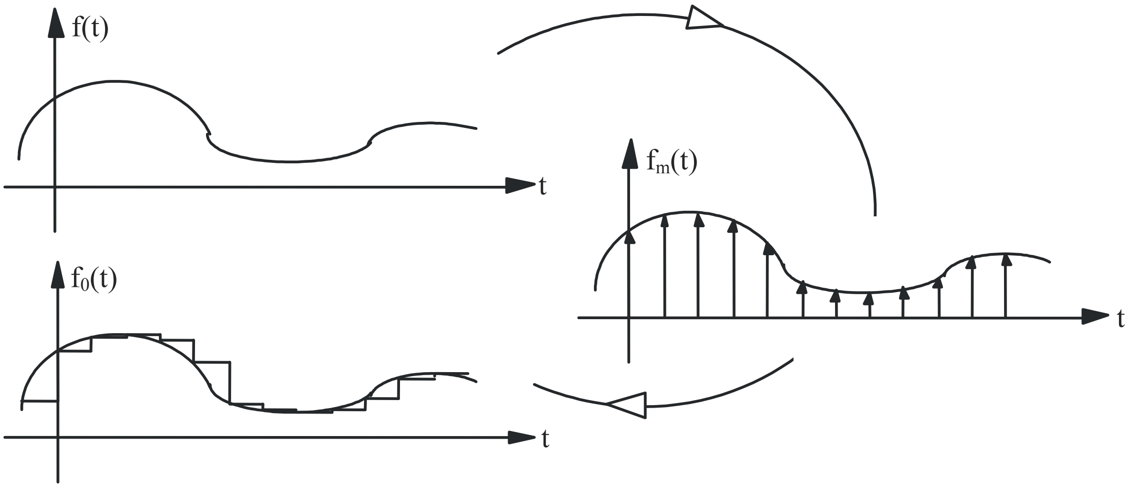


Ilustración IV-13: Actuación del mantenedor de orden cero

El filtro que se ha de poner a la salida, ha de ser tal que combinado con el sistema lineal invariante $h_0(t)$ sea igual al filtro ideal empleado en el apartado anterior para la reconstrucción. O sea:

$$H_r(\omega)\cdot H_0(\omega) = Q(\omega) \Rightarrow H_r(\omega) = \frac{Q(\omega)}{H_0(\omega)} \tag{IV.16}$$

donde:

$$H_0(\omega) = e^{-j\omega T/2}\left[\frac{2\,\mathrm{sen}(\omega T/2)}{\omega}\right] \tag{IV.17}$$

Por lo tanto la función del filtro $H_r(\omega)$ ha de ser (ver Ilustración IV-14):

$$H_r(\omega) = \frac{e^{j\omega T/2}Q(\omega)}{\left[\frac{2\,\mathrm{sen}(\omega T/2)}{\omega}\right]} \tag{IV.18}$$

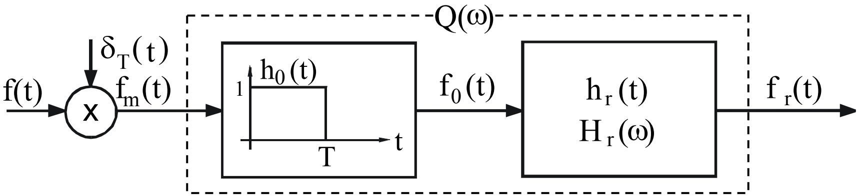


Ilustración IV-14: Filtrado del mantenedor de orden cero

Como se puede ver, para la reconstrucción de la señal original es necesario un filtro de función $H_r(\omega)$. En ciertos ocasiones la salida del mantenedor de orden cero es considerada como una buena aproximación de la señal original, ya que el mantenedor implica un filtrado.

Existen otras formas de reconstrucción de la señal muestreada, como puede ser la interpolación de orden uno (ver Ilustración IV-15), que consiste en unir cada punto de la muestra con el siguiente. Se pueden utilizar interpolaciones de orden mayor haciendo más complejo el proceso de reconstrucción pero los resultados en ocasiones no son sensiblemente mejores que en el caso del mantenedor de orden cero.

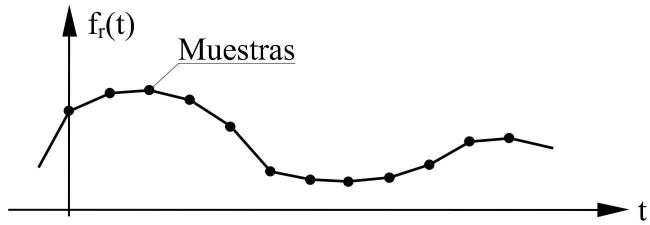


Ilustración IV-15: Interpolación de orden uno

Si tomamos una frecuencia de muestreo (ω_m) del doble de la frecuencia máxima de la señal original ($\omega_m=2\omega_c$), podemos comparar los diferentes sistemas de reconstrucción de señales en la Ilustración IV-16.

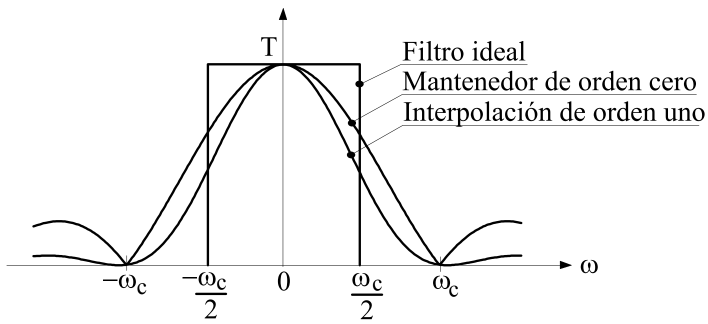


Ilustración IV-16: Comparación entre las diferentes formas de reconstrucción

V. La Transformada de Fourier Discretizada (DFT)

V.1 Introducción

En el cálculo de la Transformada de Fourier, tal y como se mostró en capítulos anteriores, están involucradas las siguientes expresiones integrales:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega \qquad (V.1)$$

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt \qquad (V.2)$$

Cuando interesa emplear una computadora para la resolución de estas ecuaciones, aparece el problema de que la Transformada de Fourier no se puede implantar directamente. El origen de esta dificultad está en que las funciones asociadas a la Transformada de Fourier son ecuaciones en el dominio continuo del tiempo y de la frecuencia, o sea, que toman infinitos valores en un intervalo finito de tiempo y de frecuencia. Mientras que las señales a tratar en una computadora han de ser señales discretas, o sea, con un número finito de valores. Se hace entonces imprescindible modificar las ecuaciones anteriores, para adaptarlas a la naturaleza de la información manejada por una computadora. De esta necesidad surge la Transformada de Fourier Discretizada ó DFT[1], que posibilita el análisis de Fourier en sistemas digitales.

Una ventaja adicional de la DFT, es la existencia de algoritmos de cálculo que permiten realizar este análisis con un número mínimo de operaciones. Estos algoritmos se agrupan bajo la denominación de FFT (Fast Fourier Transform o Transformada Rápida de Fourier), y optimizan los cálculos necesarios para la DFT, siempre y cuando las señales implicadas cumplan una serie de requisitos, por ejemplo, que el número de muestras sea una potencia de 2.

V.2 De la Transformada de Fourier a la DFT

Para explicar la DFT se parte del desarrollo gráfico que se muestra en la Ilustración V-1. El punto de partida es la señal continua f(t) con su correspondiente transformada F(ω). Estas dos señales serán modificadas, paso a paso, en aras de alcanzar una representación que pueda ser tratada en una computadora.

El primer paso a dar es el del muestreo de la señal continua f(t). Para ello se multiplica ésta por el tren de impulsos $d_0(t)$, ver Ilustración V-1 (b), el resultado es la señal muestreada $f(t)\cdot d_0(t)$ que se puede ver en la Ilustración V-1 (c). Entonces, empleando la Transformada de Fourier del tren de impulsos:

$$d_0(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)\rightarrow\Im\{d_0(t)\}=D_0(\omega)=\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}\delta(\omega-2\pi k/T) \qquad (V.3)$$

Aplicando el teorema de modulación:

$$f(t)d_0(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}f(kT)\delta(t-kT)\rightarrow\frac{1}{2\pi}F(\omega)*D_0(\omega)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}F(\omega-2\pi k/T) \qquad (V.4)$$

[1] DFT son las siglas de *Discrete Fourier Transform*

donde T es el período de muestreo y $\Im$ es el operador que realiza la Transformada de Fourier.

Si se analiza el resultado en el dominio de la frecuencia, se puede ver que la función F(ω) se ha transformado en una función periódica de período 2π/T como consecuencia de la convolución entre el tren de impulsos $D_0(\omega)$ y F(ω). Aquí aparece la primera fuente de errores a la hora de emplear la DFT como aproximación de la Transformada de Fourier, ya que si se muestrea por debajo de la frecuencia de Nyquist, el efecto de solapamiento (*aliasing*) típico en los procesos de muestreo hace acto de presencia, como se puede apreciar en la Ilustración V-1 (c). La forma de disminuir este error es disminuyendo el período de muestreo.

La señal obtenida en este paso $f(t)\cdot d_0(t)$ no es, todavía, una señal que pueda ser tratada en una computadora, debido a que contiene un número infinito de valores. Es necesario, por lo tanto, considerar únicamente un número finito de puntos, por ejemplo N. Para conseguir esto último se emplea la función de truncado p(t) que se muestra en la Ilustración V-1 (d), y se obtiene la señal $f(t)\cdot d_0(t)\cdot p(t)$, ver Ilustración V-1 (e), con un número finito de valores, que ya es manejable por un ordenador. Las operaciones en este punto son:

$$p(t)=\begin{cases}1 & -T/2\le t\le T_0-T/2\\ 0 & t<-T/2 \text{ ó } t>T_0-T/2\end{cases}\rightarrow P(\omega)=T_0\frac{\sin\left(\frac{\omega T_0}{2}\right)}{\frac{\omega T_0}{2}}e^{-j\frac{\omega}{2}(T_0-T)} \qquad (V.5)$$

$$f(t)d_0(t)p(t)=\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty}f(kT)\delta(t-kT)\right]\cdot p(t)=\sum_{k=0}^{N-1}f(kT)\delta(t-kT) \qquad (V.6)$$

$$\begin{aligned}\Im\{f(t)d_0(t)p(t)\}&=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{2\pi}F(\omega)*D_0(\omega)\right]*P(\omega)\\ &=\frac{T_0}{2\pi T}\frac{\sin\left(\frac{\omega T_0}{2}\right)}{\frac{\omega T_0}{2}}e^{-j\frac{\omega}{2}(T_0-T)}*\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}F\left(\omega-\frac{2\pi k}{T}\right)\end{aligned} \qquad (V.7)$$

donde $T_0/2\pi T$, se puede poner como $N/2\pi$.

La Transformada de Fourier de la función $f(t)\cdot d_0(t)\cdot p(t)$ en la Ilustración V-1 (d) resulta de la convolución de la Transformada de Fourier del paso anterior con la función sinc. Esto produce nuevamente una discrepancia con la Transformada de Fourier original F(ω), ya que aparece un rizado en la Transformada de Fourier obtenida en este paso. Para reducir este efecto habría que aumentar el número N de muestras, y de esta forma la función sinc asociada a la función de truncado se hará más estrecha, pareciéndose más un impulso ($g(t)*\delta(t)=g(t)$).

Ahora la señal temporal obtenida tiene las características necesarias para su tratamiento en una computadora. Sin embargo su Transformada de Fourier obtenida no, ya que es una señal continua, por lo tanto, es necesario su muestreo mediante la multiplicación con el tren de impulsos $D_1(\omega)$, ver Ilustración V-1 (f) e Ilustración V-1 (g). El intervalo escogido para el muestreo es $2\pi/T_0$. El resultado es una función periódica que está muestreada en el dominio de la frecuencia con el tren de impulsos:

$$D_1(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-n2\pi/T_0)\rightarrow\Im^{-1}\{D_1(\omega)\}=d_1(t)=\frac{T_0}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_0) \qquad (V.8)$$

Se ha obtenido una función periódica muestreada, por lo tanto, para definirla sólo es necesario conocer el área de los N impulsos de un período cualquiera, esto es una cantidad finita de información que era lo exigido para poder ser representada en una computadora. Pero, ¿qué le ha ocurrido a la señal temporal? Como en el dominio de la frecuencia se ha multiplicado por un tren de impulsos, en el dominio del tiempo se ha de hacer la convolución con el tren de impulsos dual del anterior $d_1(t)$, o sea:

$$\tilde{f}(t)=\left[f(t)d_0(t)p(t)\right]*d_1(t)=\left[\sum_{k=0}^{N-1}f(kT)\delta(t-kT)\right]*\left[\frac{T_0}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_0)\right] \qquad (V.9)$$

$$\frac{2\pi}{T_0}\tilde{f}(t)=...+\sum_{k=0}^{N-1}f(kT)\delta(t-kT-T_0)+\underbrace{\sum_{k=0}^{N-1}f(kT)\delta(t-kT)}_{\text{1 período}}+\sum_{k=0}^{N-1}f(kT)\delta(t-kT+T_0)+... \qquad (V.10)$$

Poniendo estos resultados de una forma más compacta:

$$\tilde{f}(t)=\frac{T_0}{2\pi}\sum_{r=-\infty}^{+\infty}\left[\sum_{k=0}^{N-1}f(kT)\delta(t-kT-rT_0)\right] \qquad (V.11)$$

Se obtiene una función periódica $\tilde{f}(t)$ de período T_0 con N valores distintos. Al igual que la correspondiente señal frecuencial ésta quedaría representada una vez conocidas las áreas de los N impulsos que constituyen un período cualquiera. Por lo tanto, se ha alcanzado una situación en la que tanto la información de la señal temporal como la de la frecuencial son tratables por una computadora. Esto era el objetivo inicial del análisis.

En este momento conviene considerar el porqué de la elección de un muestreo de $2\pi/T_0$ para este último paso. El motivo de esta elección es el de evitar un solapamiento en el dominio temporal al convolucionar la señal $f(t)\cdot d_0\cdot(t)\cdot p(t)$ con $d_1(t)$. Al realizar esta operación la señal resultante es periódica con período T_0, que es exactamente la duración de la señal truncada y muestreada, de ahí que no se produzca solapamiento. Otra consideración a tener en cuenta es que la función de truncado no debe tener en sus extremos ninguna muestra, ya que esto también provocaría solapamiento. Para evitar esto último, se hace que los límites de p(t) caigan en el medio de un intervalo de muestreo (de $-T/2$ a $T_0-T/2$).

Falta por lo tanto conocer la expresión de la Transformada de Fourier resultante de todas las operaciones anteriores, y buscar una expresión que pueda representarla, para la cual, como ya se ha dicho, sólo sería necesario conocer el área de los N impulsos que constituyen un período cualquiera. Dicha transformada se puede expresar como:

$$\tilde{F}(\omega)=\frac{1}{(2\pi)^2}\left[F(\omega)*D_0(\omega)*P(\omega)\right]D_1(\omega) \qquad (V.12)$$

Para la obtención de la expresión de la Transformada de Fourier de la señal $\tilde{f}(t)$ existen dos caminos: realizar todas las operaciones duales de las llevadas a cabo en el dominio del tiempo, o bien, calcular directamente la Transformada de Fourier de la función.

El primer camino, es útil para poder observar los efectos de la discretización tanto en el tiempo como en la frecuencia (solapamiento, oscilaciones...), tal y como se puede ver en la Ilustración V-1, pero la expresión resultante es compleja y de difícil simplificación.

El segundo camino es el se ha empleado para obtener la expresión analítica de la Transformada de Fourier de la señal $\tilde{f}(t)$, de la que se deriva la DFT. Para ello se tendrá en cuenta que $\tilde{f}(t)$ es una señal periódica de período T_0, y por lo tanto, su transformada se puede poner como:

$$\tilde{F}(\omega)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}d_k\delta(\omega-k\omega_0) \qquad (V.13)$$

donde:

- ω_0 es la frecuencia fundamental de $\tilde{f}(t)$: $\omega_0=2\pi/T_0=2\pi/NT$
- d_k son los coeficientes de la serie de Fourier: $d_k=\frac{1}{T_0}\int_{-T/2}^{T_0-T/2}\tilde{f}(t)e^{-j2\pi kt/T_0}dt$

Sustituyendo el valor de $\tilde{f}(t)$ por su expresión los coeficientes de la serie de Fourier quedan de la forma:

$$d_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-T/2}^{T_0-T/2} \sum_{r=-\infty}^{+\infty}\left[\sum_{n=0}^{N-1} f(nT)\delta\left(t - nT - rT_0\right)\right] e^{-j2\pi kt/T_0} dt \qquad \text{(V.14)}$$

Como la integración se realiza sobre un solo período la expresión de los coeficientes se puede poner como:

$$d_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-T/2}^{T_0-T/2}\sum_{n=0}^{N-1} f(nT)\delta\left(t - nT\right)e^{-j2\pi kt/T_0}dt = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{N-1} f(nT)\int_{-T/2}^{T_0-T/2}\delta\left(t-nT\right)e^{-j2\pi kt/T_0}dt \qquad \text{(V.15)}$$

La expresión final de los coeficientes de la serie de Fourier es:

$$d_k = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{N-1} f\left(nT\right)e^{-j2\pi kn/N} \qquad \text{(V.16)}$$

Sustituyendo esta expresión en la de la transformada de Fourier, se tiene que:

$$\tilde{F}\left(\omega\right) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} 2\pi d_r \delta\left(\omega - r\omega_0\right) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty}\left[\sum_{n=0}^{N-1} f\left(nT\right)e^{-j2\pi rn/N}\right]\delta\left(\omega - r\omega_0\right) \qquad \text{(V.17)}$$

O puesto de otra forma:

$$\tilde{F}\left(\omega\right) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} 2\pi c_r \delta\left(\omega - r\omega_0\right) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} F_{DFT}\left(r\omega_0\right)\delta\left(\omega - r\omega_0\right) \qquad \text{(V.18)}$$

La función $\tilde{F}\left(\omega\right)$ es un función periódica con N valores distintos por período, entonces se puede asociar el valor de la Transformada de Fourier a los N valores distintos de los coeficientes de los impulsos unitarios, por lo tanto la expresión de la DFT es:

$$F_{DFT}\left(k\omega_0\right) = \sum_{n=0}^{N-1} f\left(nT\right)e^{-j2\pi kn/N} \qquad k = 0, 1, 2, ..., N-1 \qquad \text{(V.19)}$$

La periodicidad de la función $\tilde{F}\left(k\omega_0\right)$ se basa en la propiedad:

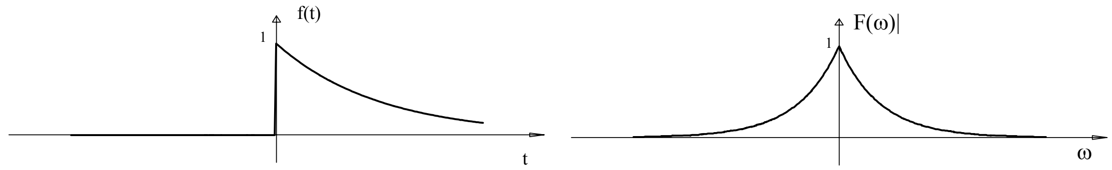
$$\text{si } n = r + N;\; e^{-j2\pi kn/N} = e^{-j2\pi k(r+N)/N} = e^{-j2\pi kr/N}e^{-j2\pi k} = e^{-j2\pi kr/N} \qquad \text{(V.20)}$$

Y por lo tanto:

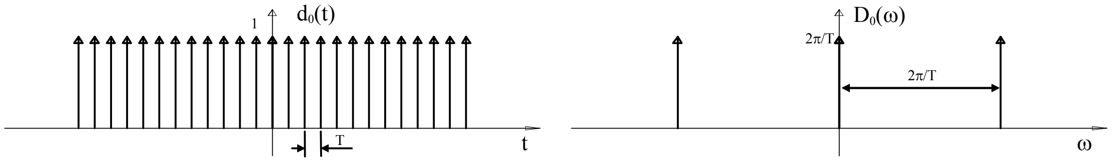
$$\text{Si } n = r + N; \quad F_{DFT}\left(n\omega_0\right) = F_{DFT}\left(r\omega_0\right) \qquad \text{(V.21)}$$

Típicamente los N valores calculados de la DFT son los N primeros (de 0 a N-1), ya que en este caso se varía la k desde 0 a N-1. Pero no se debe olvidar la periodicidad de la DFT, que hace que los coeficientes calculados con F_{DFT} $(k\omega_0)$ sean periódicos con período N, y por lo tanto se puede obtener cualquier valor de la DFT una vez los de un período cualquiera.

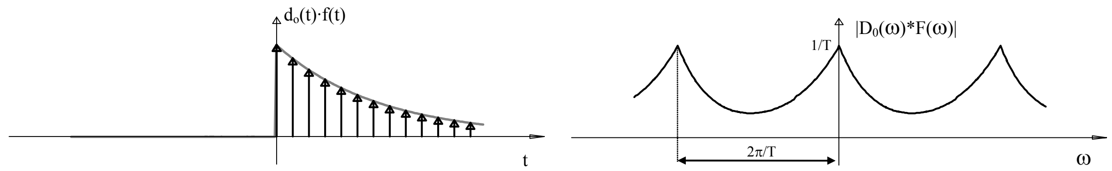
Dominio temporal **Dominio frecuencial**



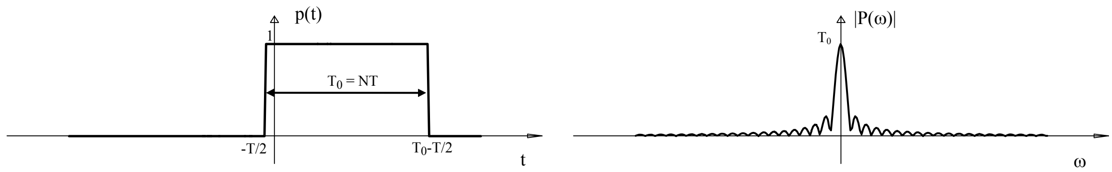
(a) Señal continua.



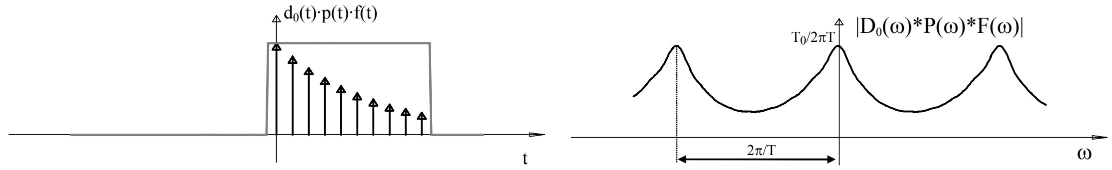
(b) Tren de impulsos para el muestreo.



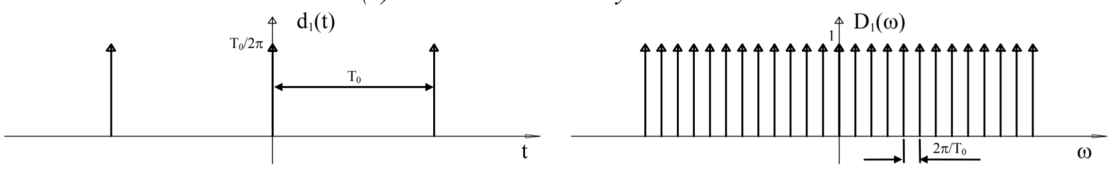
(c) Señal muestreada.



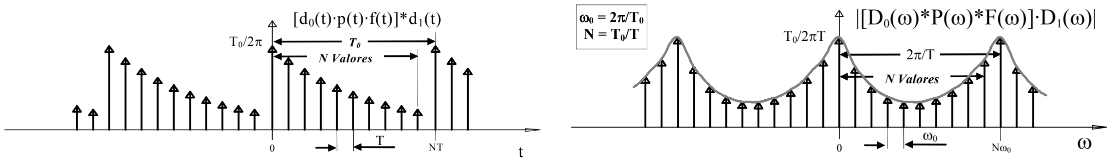
(d) Señal para el truncado.



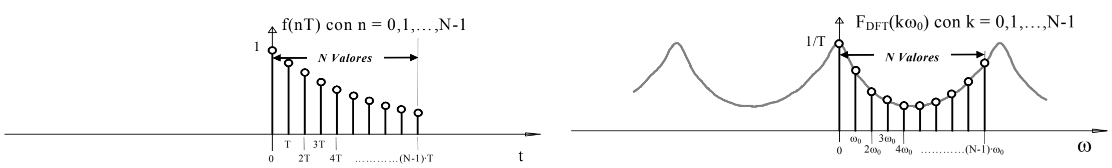
(e) Señal muestreada y truncada.



(f) Tren de impulsos para el muestreo en frecuencia.



(g) Señal reconstruida.



(h) Transformada de Fourier Discretizada (DFT).

Ilustración V-1: Pasos a seguir en la obtención de la DFT

V.3 La Inversa de la Transformada de Fourier Discretizada (IDFT)

La expresión de la Inversa de la Transformada de Fourier Discretizada o IDFT[2] es:

$$f(nT) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} F_{DFT}(k\omega_0)e^{j2\pi nk/N} \quad n = 0, 1, 2, ..., N-1 \qquad (V.22)$$

Esta expresión nos da los N primeros valores del área de los impulsos de la función periódica $\tilde{f}(t)$, que coinciden con los N primeros valores de la función f(t) escogidos con un intervalo de tiempo T.

Para comprobar la validez de esta expresión, se sustituye el valor f(nT) en la expresión de la DFT, de forma que:

$$\begin{aligned} F_{DFT}(k\omega_0) &= \sum_{n=0}^{N-1} f(nT)e^{-j2\pi kn/N} = \sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{r=0}^{N-1} F_{DFT}(r\omega_0)e^{j2\pi rn/N}\right]e^{-j2\pi kn/N} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{r=0}^{N-1} F_{DFT}(r\omega_0)\left[\sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi rn/N}e^{-j2\pi kn/N}\right] = F_{DFT}(k\omega_0) \end{aligned} \qquad (V.23)$$

La obtención de esta igualdad se basa en la relación de ortogonalidad:

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi rn/N}e^{-j2\pi kn/N} = \begin{cases} N \text{ si } r = k \\ 0 \text{ si } r \neq k \end{cases} \qquad (V.24)$$

Análogamente a lo obtenido en el apartado anterior, la función g(nT) obtenida es periódica de forma que:

$$g(kT) = g\left[(rN + k)T\right] \quad r = 0, \pm 1, \pm 2, ... \qquad (V.25)$$

V.4 Relación entre la Transformada de Fourier y la DFT

Una vez alcanzada la expresión para la DFT, es necesario ver bajo que condiciones ésta es capaz de alcanzar la mejor aproximación a la Transformada de Fourier.

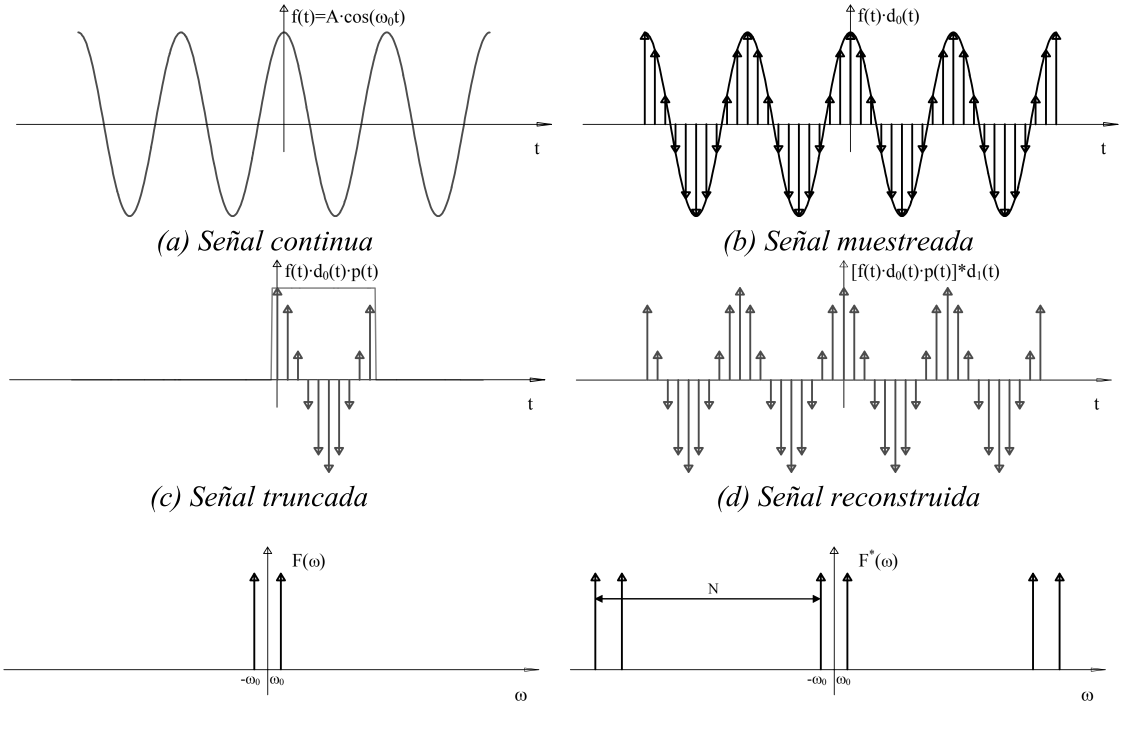
La DFT implica un muestreo, un truncado y la convolución de la señal resultante con un tren de impulsos cuyo resultado es una señal periódica discreta. Para que la DFT sea igual a la Transformada de Fourier, ninguno de los tres pasos anteriores ha de significar una pérdida o distorsión de la información que contiene la señal continua.

Para que el muestreo no implique pérdida de información, se debe muestrear a una frecuencia superior a la que nos da el límite de Nyquist, por lo tanto la señal ha de ser limitada en frecuencia, o lo que es lo mismo, que su Transformada de Fourier tenga una frecuencia máxima.

En el truncado y convolución, el objetivo es el de obtener una señal periódica a partir de una porción de información de la señal original. En primer lugar, como la señal a la que se llega es una señal periódica, la señal original lo ha de ser también. Al hacer la convolución la señal truncada pasa a ser un período representativo de nuestra señal final, por lo tanto el truncado ha de abarcar exactamente a uno o varios períodos de la señal original si se no se desea introducir error en este paso.

[2] IDFT son las siglas de *Inverse Discrete Fourier Transform*

Otra consideración a tener en cuenta es que si la señal original es periódica, después del muestreo ha de seguir siéndolo. Para ello se ha de escoger una frecuencia de muestreo múltiplo de la de la señal original.



(e) Transformada de Fourier *(f) Transformada de Fourier Discretizada*

Ilustración V-2: Modificaciones de la señal continua en el proceso de obtención de la DFT

Si la señal original se ajusta al los requisitos anteriores, la Transformada de Fourier y la DFT son equivalentes, o sea, salvo en una constante, su espectro frecuencial es el mismo si sólo se tienen en cuenta aquellas componentes en frecuencia que están por debajo de la mitad de la frecuencia de muestreo (2π/T). Se ha de tener en cuenta que, en la Transformada de Fourier aparecen impulsos multiplicados por un determinado coeficiente, y con la DFT se obtiene precisamente el valor de estos coeficientes.

Los requisitos de la señal para que su DFT pueda ser equivalente a la Transformada de Fourier son:

- Ser una señal periódica.
- Ser una señal de banda limitada, o sea, que su espectro frecuencial tenga un frecuencia máxima finita.

Por otra parte, a la hora de preparar la señal para el cálculo de la DFT, se hace necesario cumplir unas condiciones que garanticen la equivalencia entre la Transformada de Fourier y la DFT, estas son:

- Muestrear por encima del doble de la frecuencia máxima de la señal (límite de Nyquist). Además la frecuencia de muestreo ha de ser un múltiplo entero de la frecuencia fundamental.
- El tiempo de truncado ha de ser un múltiplo entero del período de la señal, para que este abarque un número entero de períodos.

Un ejemplo de lo que ocurriría si no se cumple esta última condición lo podemos ver en la Ilustración V-3.

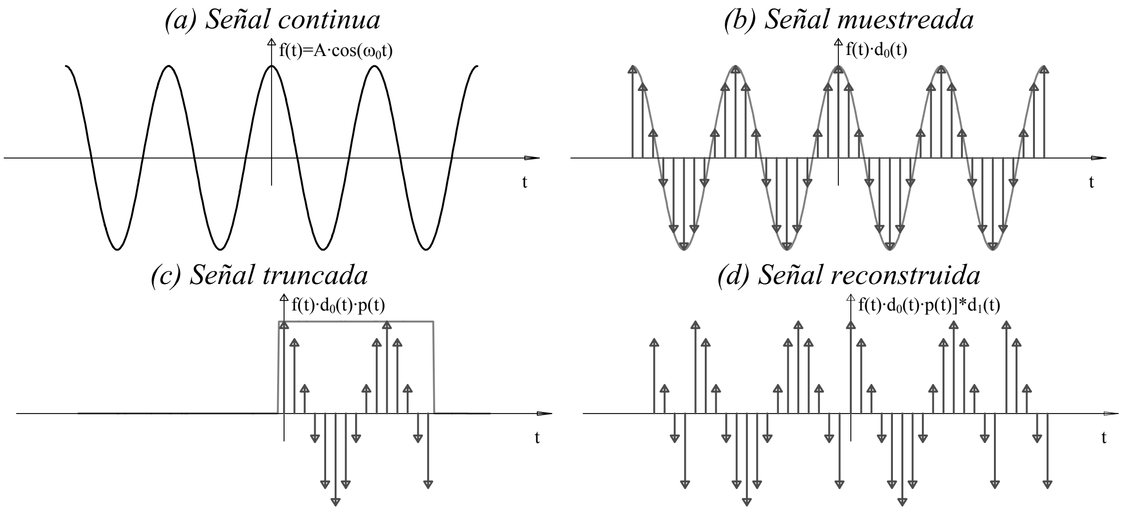


Ilustración V-3: Modificaciones Caso en que el truncado no es igual a un número entero de períodos

En la Ilustración V-1 se presenta un ejemplo en el que no se cumple ninguna de las condiciones expuestas que posibilitan la equivalencia entre la Transformada de Fourier y la DFT. De todas formas, dentro de un rango de frecuencias, la DFT es una buena aproximación de la Transformada de Fourier.

En el caso de señales periódicas de las que se desconozca su frecuencia, y se quiera minimizar los errores, es necesario escoger el período de muestreo más bajo posible (establece la frecuencia máxima que podemos reconocer) y el período de truncado lo más alto posible (fija el $\Delta\omega$ mínimo que aparecerá en nuestro espectro frecuencial).

Para calcular la relación existente entre la Transformada de Fourier y la DFT se parte de la expresión de la Transformada de Fourier en (V.2). Si se emplea el método de integración numérica de Euler para su resolución, se llega a:

$$F(\omega) = T\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT)e^{-j\omega nT} \tag{V.26}$$

donde $F(\omega)$ es la transformada de Fourier de $f(t)$.
Si se tienen en cuenta sólo N valores distintos de $f(t)$, el sumatorio anterior queda reducido a un sumatorio finito:

$$F(n) = T\sum_{n=0}^{N-1} f(nT)e^{-j\omega nT} \tag{V.27}$$

Para poder comparar el resultado de este sumatorio con la DFT, las componentes en frecuencia de interés son aquellas que cumplen la relación:

$$\omega = k\omega_0 = k\frac{2\pi}{T_0} = k\frac{2\pi}{NT} \tag{V.28}$$

Y por lo tanto la Transformada de Fourier aproximada queda de la forma:

$$F(k\omega_0) = T\sum_{n=0}^{N-1} f(nT)e^{-j2\pi kn/N} = T\cdot F_{DFT}(k\omega_0) \tag{V.29}$$

De donde se deduce que la DFT se puede interpretar como el resultado de emplear el método de integración de Euler para la resolución de la Transformada de Fourier. Para que al hacer esta aproximación no se introduzca un error excesivo, la señal original $f(t)$ ha de ser finita en el tiempo (o poder aproximarse sin un error excesivo a una señal finita), para que los N valores empleados en (V.29) puedan ser representativos de $f(t)$.

Si la señal original es periódica, y, por lo tanto, se comete un error excesivo al considerarla finita, para encontrar la correspondencia entre la Transformada de Fourier y la DFT se recurre a la relación que hay entre la Transformada de Fourier de funciones periódicas y la serie de Fourier:

$$F(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \delta(\omega - n\omega_0) \tag{V.30}$$

donde

- ω_0 es la frecuencia fundamental de f(t): $\omega_0 = 2\pi/T_0 = 2\pi/NT$
- d_n son los coeficientes de la serie de Fourier: $d_n = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} f(t)e^{-j2\pi nt/T_0}dt$

Como en el caso anterior se aplica el método de integración numérica para calcular los coeficientes de la serie de Fourier, y llegándose a la expresión:

$$d_n = \frac{T}{T_0}\sum_{k=0}^{N-1} f(kT)e^{-j2\pi knT/T_0} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f(kT)e^{-j2\pi kn/N} = \frac{1}{N}F_{DFT}(n\omega_0) \tag{V.31}$$

O sea:

$$d_n = \frac{1}{N}F_{DFT}(n\omega_0) \tag{V.32}$$

Entonces la Transformada de Fourier de un señal periódica se aproxima por la DFT como:

$$F(k\omega_0) = \frac{2\pi}{N}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_{DFT}(n\omega_0)\delta(k\omega_0 - n\omega_0) \tag{V.33}$$

Si se consideran sólo los N primeros coeficientes de los impulsos $\delta(k\omega_0 - n\omega_0)$ se obtiene la expresión de la DFT multiplicada por 2π/N

V.5 Convolución Periódica Discreta

La convolución periódica discreta está definida por el sumatorio:

$$y(nT) = f(nT) \otimes g(nT) = \sum_{i=0}^{N-1} f(iT)g[(n-i)T] \tag{V.34}$$

donde f(nT) y g(nT) son funciones periódicas de período N, de forma que:

$$\left.\begin{aligned} f(nT) &= f[(n+rN)T] \\ g(nT) &= g[(n+rN)T] \end{aligned}\right\} r = 0, \pm 1, \pm 2, ... \tag{V.35}$$

Las señales a convolucionar han de tener el mismo período (en la Ilustración V-4 se pueden ver dos señales cuyo período es N = 4). En la expresión de la convolución se puede ver que son necesarias las señales f(iT) y g[(2-iT)], donde la obtención de la segunda de ellas se logra a partir de g(-iT) desplazada, tal y como se puede ver en la Ilustración V-5.

Si se desea comparar la convolución discreta con la continua, se ha de integrar la convolución continua por el método de Euler, llegándose a:

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau \rightarrow f(nT)\otimes g(nT) = T\sum_{i=0}^{N-1} f(iT)g[(n-i)T] \tag{V.36}$$

La gran diferencia con respecto a la convolución continua, es que la discreta sólo involucra señales discretas periódicas con la misma frecuencia, por este motivo generalmente nos referimos a ella como convolución circular o periódica.

A partir de estas definiciones se puede establecer el teorema de convolución como:

$$f(nT) \otimes g(nT) \xrightarrow{DFT} F_{DFT}\left(\frac{2\pi k}{NT}\right) \cdot G_{DFT}\left(\frac{2\pi k}{NT}\right) \tag{V.37}$$

Cuando se lleva a cabo la convolución de dos señales, generalmente es más rápido calcular las respectivas DFT de las señales involucradas, multiplicarlas y calcular la trasformada inversa, siempre y cuando los algoritmos de cálculo de la DFT sean los FFT.

Para que un período de la convolución recién descrita se pueda tomar como una aproximación de la convolución continua, se ha de escoger un período que cumpla que:

$$N \geq P + Q - 1 \tag{V.38}$$

donde P y Q son las muestras distintas de cero para f(t) y g(t) respectivamente. Si se garantiza el cumplimiento de esta condición, entonces:

$$y(nT) = T\sum_{i=0}^{N-1} f(iT)\, g\left[(n-i) - T\right] \tag{V.39}$$

V.6 Propiedades de la DFT

Las propiedades de la DFT son en gran parte las mismas que las de la Transformada de Fourier, ya que la primera se puede obtener a partir de la segunda. Estas propiedades se agrupan en la tabla que a continuación se muestra, donde se ha sustituido nT por n, y k por 2πk/NT para simplificar la notación.

Tabla 1: Resumen de las propiedades más importantes de la DFT

	Dominio temporal	***Dominio frecuencial***
Linealidad	$f(n) + g(n)$	$F(k) + G(k)$
Dualidad	$F(n)/N$	$f(-k)$
Desplazamiento Temporal	$f(n-i)$	$F(k)e^{-j2\pi ki/N}$
Desplazamiento Frecuencial	$f(n)e^{j2\pi ni/N}$	$F(k-i)$
Teorema de Convolución	$f(n) \otimes g(n)$	$F(k) \cdot G(k)$
Teorema de Modulación	$f(n) \cdot g(n)$	$F(k) \otimes G(k)/N$
Teorema de Parseval	$\sum_{n=0}^{N-1} f^2(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\lvert F(k)\rvert^2$	

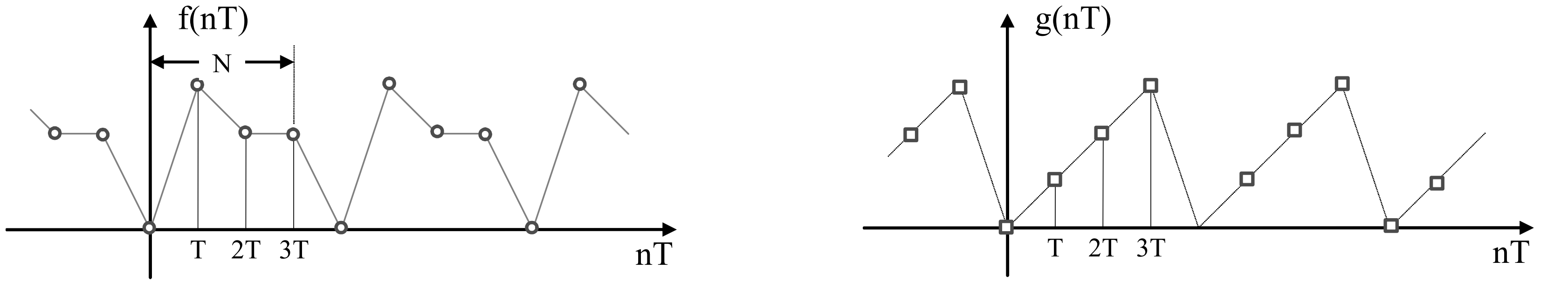


Ilustración V-4: Ejemplo de señales discretas

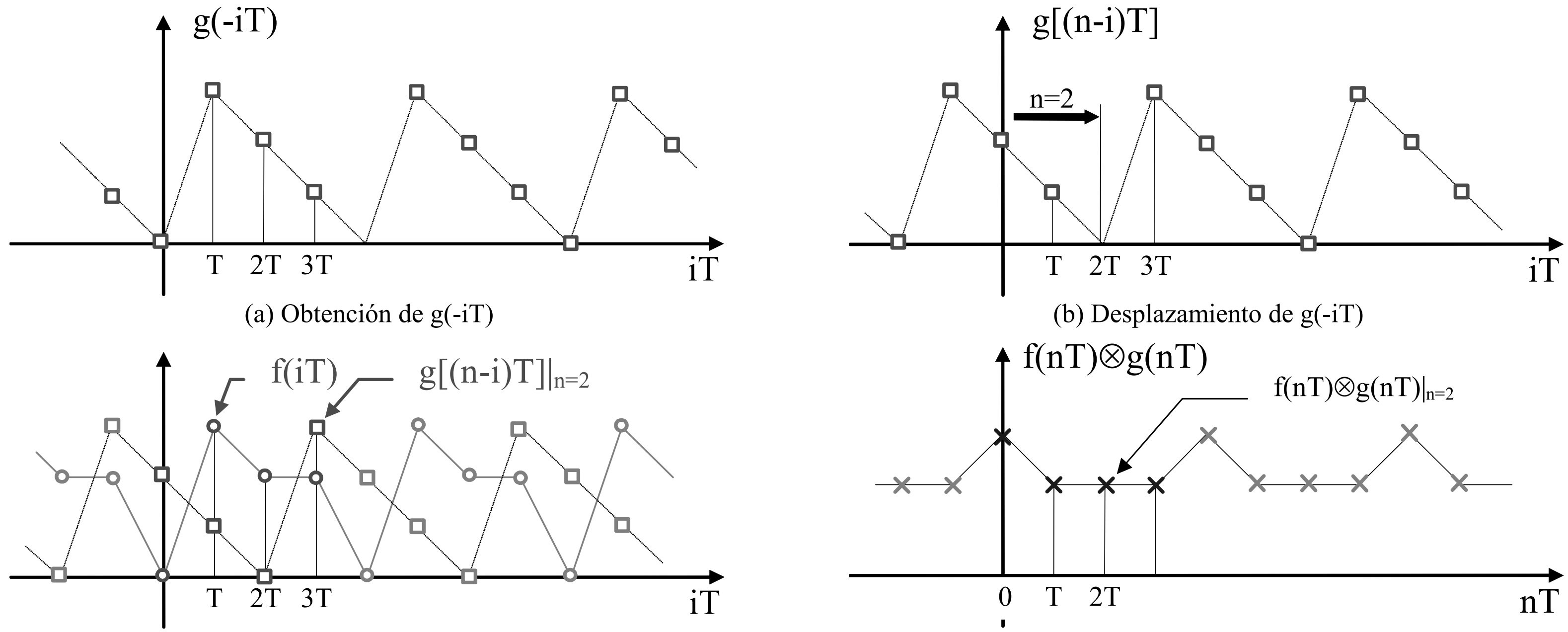


Ilustración V-5: Operaciones en el proceso de convolución

VI. La Transformada Rápida De Fourier

VI.1 Introducción

La Transformada Rápida de Fourier (FFT ó Fast Fourier Transform) es un algoritmo de cálculo de la DFT que requiere mecho menor esfuerzo computacional que el cálculo directo de la DFT. Se basa en un cálculo iterativo de los coeficientes de la DFT, de forma que se optimiza el número de operaciones a realizar y, consecuentemente, el tiempo de cómputo de la transformada. Conviene resaltar que la FFT no sólo optimiza el tiempo de cálculo, si no que también reduce considerablemente los errores de redondeo asociados con la representación en una computadora de los datos numéricos mediante una palabra finita (con un número determinado de bits). De hecho, tanto el tiempo de cálculo como el error de redondeo se reducen un factor de $\left(\log_2 N\right)/N$, donde N es el número de muestras de la señal a tratar. Por ejemplo si $N=1024=2^{10}$, el factor vale 102.4, o sea, que si el cálculo directo de la DFT tarda 1 hora, la FFT estaría disponible en solamente 35 segundos.

La interpretación de la FFT no requiere un conocimiento profundo del algoritmo implantado para su cálculo, pero si es necesario una buena base en cuanto al comportamiento de la DFT. De esto se deduce el hecho de que la FFT es un algoritmo relativamente sencillo.

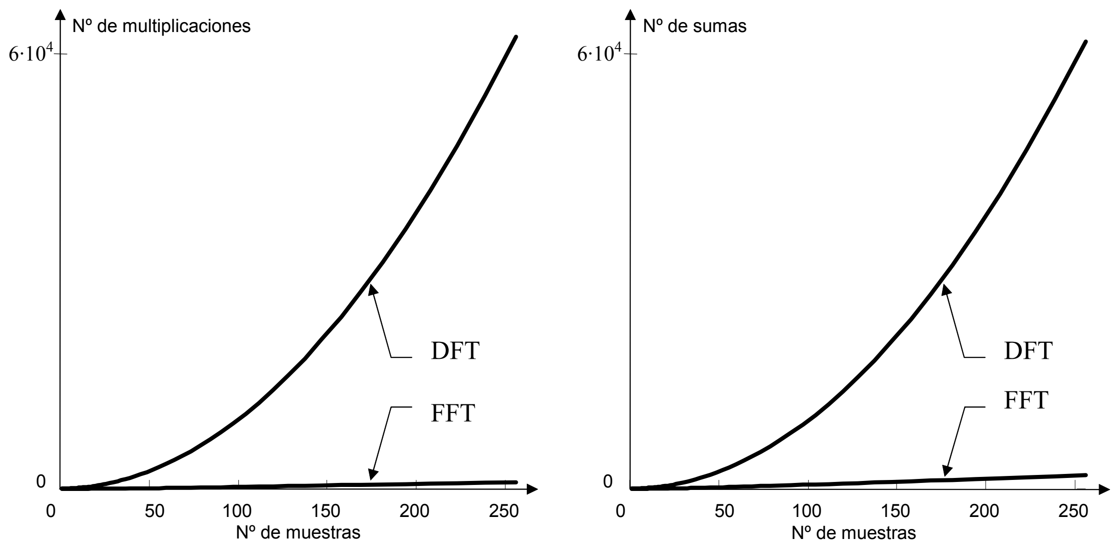


Ilustración VI-1: Comparación entre las operaciones necesarias para una DFT y una FFT

VI.2 Formulación Matricial de la FFT

Sea la expresión de la DFT:

$$X\left(k\omega_0\right)=\sum_{n=0}^{N-1} x_0\left(nT\right)W^{kn} \qquad k=0,1,2,...,N-1 \tag{VI.1}$$

donde $W=e^{-j2\pi/N}$.

Esta expresión para el cálculo de la DFT describe un conjunto de N ecuaciones, de forma que si N = 4 se obtiene:

$$\begin{aligned}
X(0) &= x_0(0)W^0 + x_0(1)W^0 + x_0(2)W^0 + x_0(3)W^0 \\
X(1) &= x_0(0)W^0 + x_0(1)W^1 + x_0(2)W^2 + x_0(3)W^3 \\
X(2) &= x_0(0)W^0 + x_0(1)W^2 + x_0(2)W^4 + x_0(3)W^6 \\
X(3) &= x_0(0)W^0 + x_0(1)W^3 + x_0(2)W^6 + x_0(3)W^9
\end{aligned} \qquad \text{(VI.2)}$$

Esto mismo puesto de forma matricial daría:

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(0) \\ x_0(1) \\ x_0(2) \\ x_0(3) \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{W}^{\mathbf{kn}} \mathbf{x_0} \qquad \text{(VI.3)}$$

Examinando la ecuación anterior se puede ver que tanto W como $x_0(k)$ pueden ser números complejos, entonces se necesitan N^2 multiplicaciones y N·(N-1) sumas para el cálculo directo de una DFT de N puntos. Esencialmente, la FFT es un algoritmo que reduce drásticamente el número de estas operaciones.

VI.3 Desarrollo intuitivo

El algoritmo escogido para presentar el cáclulo de la FFT es el conocido como Cooley-Tukey. El primer paso para la aplicación de este algoritmo es la elección de un número de muestras que sea una potencia de 2, o sea N = 2γ , donde γ es un número entero. Siguiendo con el ejemplo del apartado anterior se puede ver que N = 4 = 2γ = 2^2, de esta forma se puede aplicar el algoritmo de cálculo basado en la FFT al conjunto de muestras.

El algoritmo de la FFT basa su reducción de operaciones en las propiedades de W que dicen que:

$$W^{r+N} = W^r; \; W^{r+N/2} = -W^r \qquad \text{(VI.4)}$$

Mediante la aplicación del cambio de notación se llega a:

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^1 & W^2 & W^3 \\ 1 & W^2 & W^0 & W^2 \\ 1 & W^3 & W^2 & W^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(0) \\ x_0(1) \\ x_0(2) \\ x_0(3) \end{bmatrix} \qquad \text{(VI.5)}$$

El siguiente paso es factorizar la matriz de **W** de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(2) \\ X(1) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & W^0 & 0 & 0 \\ 1 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^1 \\ 0 & 0 & 1 & W^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(0) \\ x_0(1) \\ x_0(2) \\ x_0(3) \end{bmatrix} \qquad \text{(VI.6)}$$

donde se han intercambiando las filas correspondientes a X(1) y X(2) en la matriz **X**, de forma que la nueva matriz de salida es:

$$\overline{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} X(0) \\ X(2) \\ X(1) \\ X(3) \end{bmatrix} \qquad \text{(VI.7)}$$

Aceptando la factorización anterior como correcta, aunque el resultado esté *desordenado*, se debe examinar el número de operaciones necesarias para la obtención de la DFT. La primera ecuación matricial a analizar es:

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_1(1) \\ x_1(2) \\ x_1(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(0) \\ x_0(1) \\ x_0(2) \\ x_0(3) \end{bmatrix} \qquad \text{(VI.8)}$$

Teniendo en cuenta que todas la operaciones son en general complejas, los distintos elementos se van obteniendo de la siguiente manera:

$x_1(0) = x_0(0) + W^0 x_0(2)$ *1 suma y 1 multiplicación*

$x_1(1) = x_0(1) + W^0 x_0(3)$ *1 suma y 1 multiplicación*

$x_1(2) = x_0(0) - W^0 x_0(2)$ *1 suma* $W^2 = -W^0$

$x_1(3) = x_0(2) - W^0 x_0(3)$ *1 suma* $W^2 = -W^0$

En el caso de $x_1(2)$ la multiplicación compleja $W^0 x_0(2)$ ya se llevó a cabo durante el cómputo de $x_1(0)$ y por lo tanto para el cálculo de $x_1(2)$ sólo es necesario realizar una operación de suma compleja. Algo similar ocurre con $x_1(3)$. De esta forma el vector $\mathbf{x_1}$ se obtiene con 4 sumas y 2 multiplicaciones, operaciones en general complejas.

Siguiendo con el cálculo matricial indicado, ahora le toca el turno a la operación:

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(2) \\ X(1) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(0) \\ x_2(1) \\ x_2(2) \\ x_2(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & W^0 & 0 & 0 \\ 1 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^1 \\ 0 & 0 & 1 & W^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_1(1) \\ x_1(2) \\ x_1(3) \end{bmatrix} \qquad \text{(VI.9)}$$

Que siguiendo con los pasos para la anterior operación, se lleva a:

$x_2(0) = x_1(0) + W^0 x_1(1)$ *1 suma y 1 multiplicación*

$x_2(1) = x_1(0) - W^0 x_1(1)$ *1 suma* $W^2 = -W^0$

$x_2(2) = x_1(2) + W^1 x_1(3)$ *1 suma y 1 multiplicación*

$x_2(3) = x_1(2) - W^1 x_1(3)$ *1 suma* $W^3 = -W^1$

El cálculo del vector x_2 requiere nuevamente de dos multiplicaciones y 4 sumas, por lo tanto, para calcular el vector $\overline{X}$ son necesarias 4 multiplicaciones y 8 sumas complejas, mientras que el cálculo directo necesitaría de 16 multiplicaciones y 12 sumas complejas.

De modo que para computar un vector de N=2γ elementos se requiere un proceso de factorización de una matriz de tamaño N×N en γ matrices N×N, de forma que cada una de estas últimas tiene la propiedad de minimizar el número de operaciones para la obtención de un resultado intermedio. Generalizando los resultados obtenidos, la FFT requiere de Nγ/2 multiplicaciones y Nγ sumas. Por otra parte, el método directo de cálculo de la DFT implica la realización de N^2 multiplicaciones y N·(N-1) sumas. Si se asume que el tiempo de computo es proporcional al número de multiplicaciones, entonces, la relación entre el tiempo de cálculo de la DFT mediante una FFT y a través del método directo es de 2N/γ.

En el cálculo matricial que se acaba de mostrar el resultado está desordenado. Para el reordenamiento se reescribe el vector resultante $\overline{X}$ poniendo en vez de los subíndices de cada elemento su equivalente binario, y una vez hecho esto se colocan los bits leídos del revés, o sea:

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(2) \\ X(1) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X(00) \\ X(10) \\ X(01) \\ X(11) \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow & \rightarrow \\ \searrow & \nearrow \\ \nearrow & \searrow \\ \rightarrow & \rightarrow \end{matrix} \begin{bmatrix} X(00) \\ X(01) \\ X(10) \\ X(11) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} \tag{VI.10}$$

Para N>4 resulta engorroso hacer una descripción matricial del proceso de cálculo. Para solucionar esto se emplean gráficos de flujo, como, los indicados a continuación.

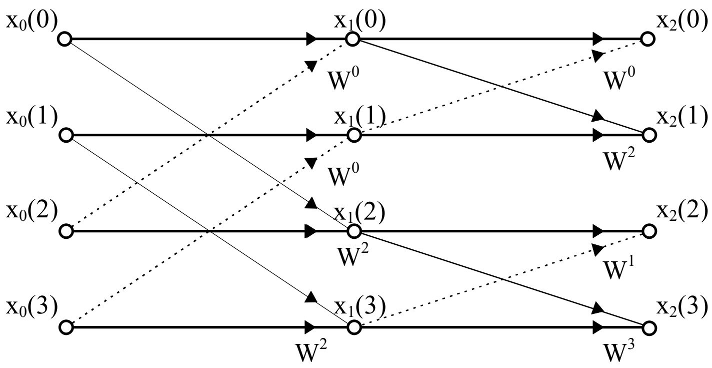


Ilustración VI-2: Mecanismo de obtención de la FFT

En las siguientes figuras se muestran el diagrama de flujo y la reordenación que se lleva a cabo cuando se realiza una FFT sobre 16 puntos.

Los principales algoritmos de cálculo de la FFT son el descrito de Cooley-Tukey y el de Sande-Tukey. Además existen múltiples algoritmos basados en los anteriores con diversas condiciones para el número de muestras, por ejemplo: $N=r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_m$

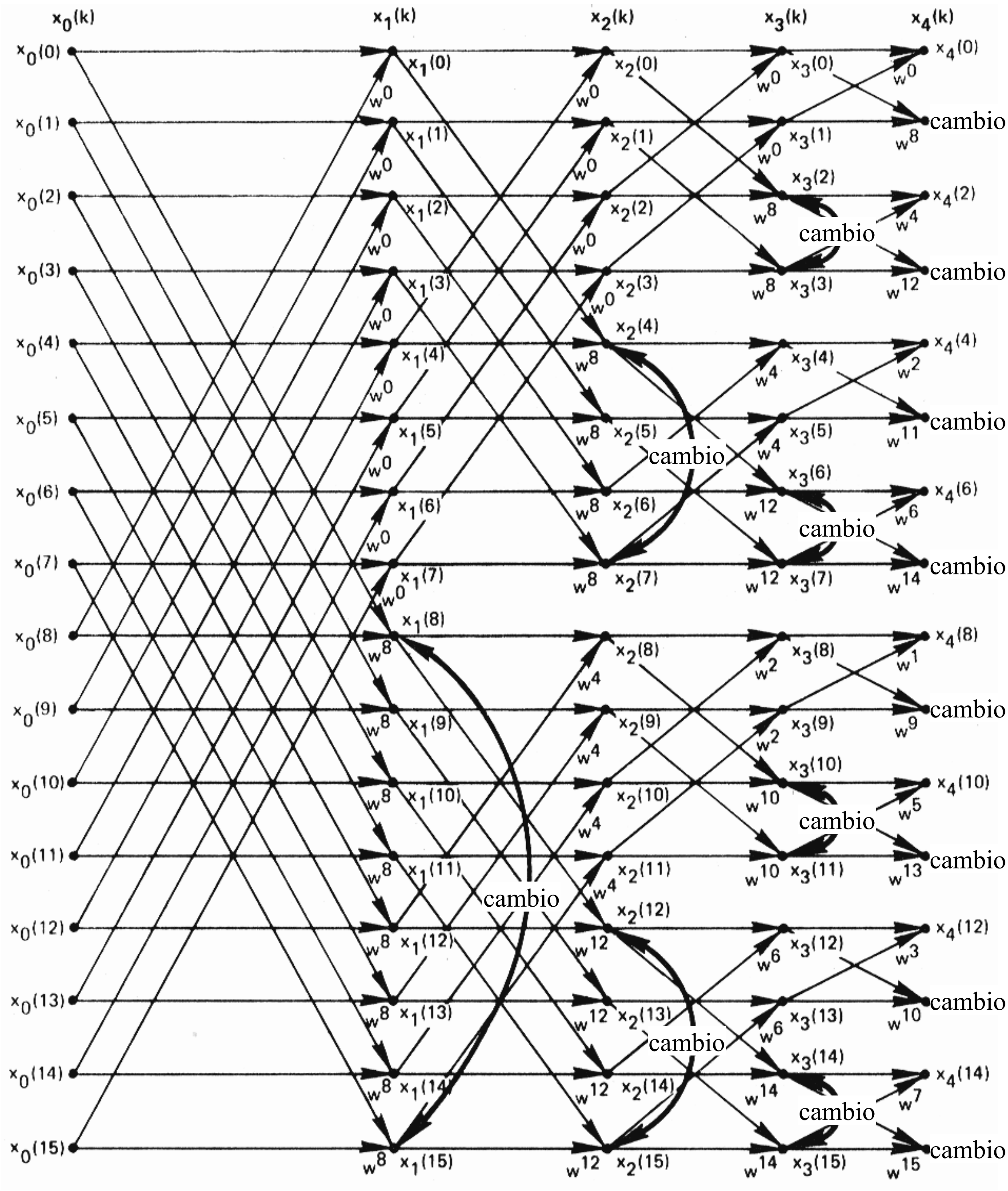


Ilustración VI-3: Diagrama de Flujo de una FFT con N = 16

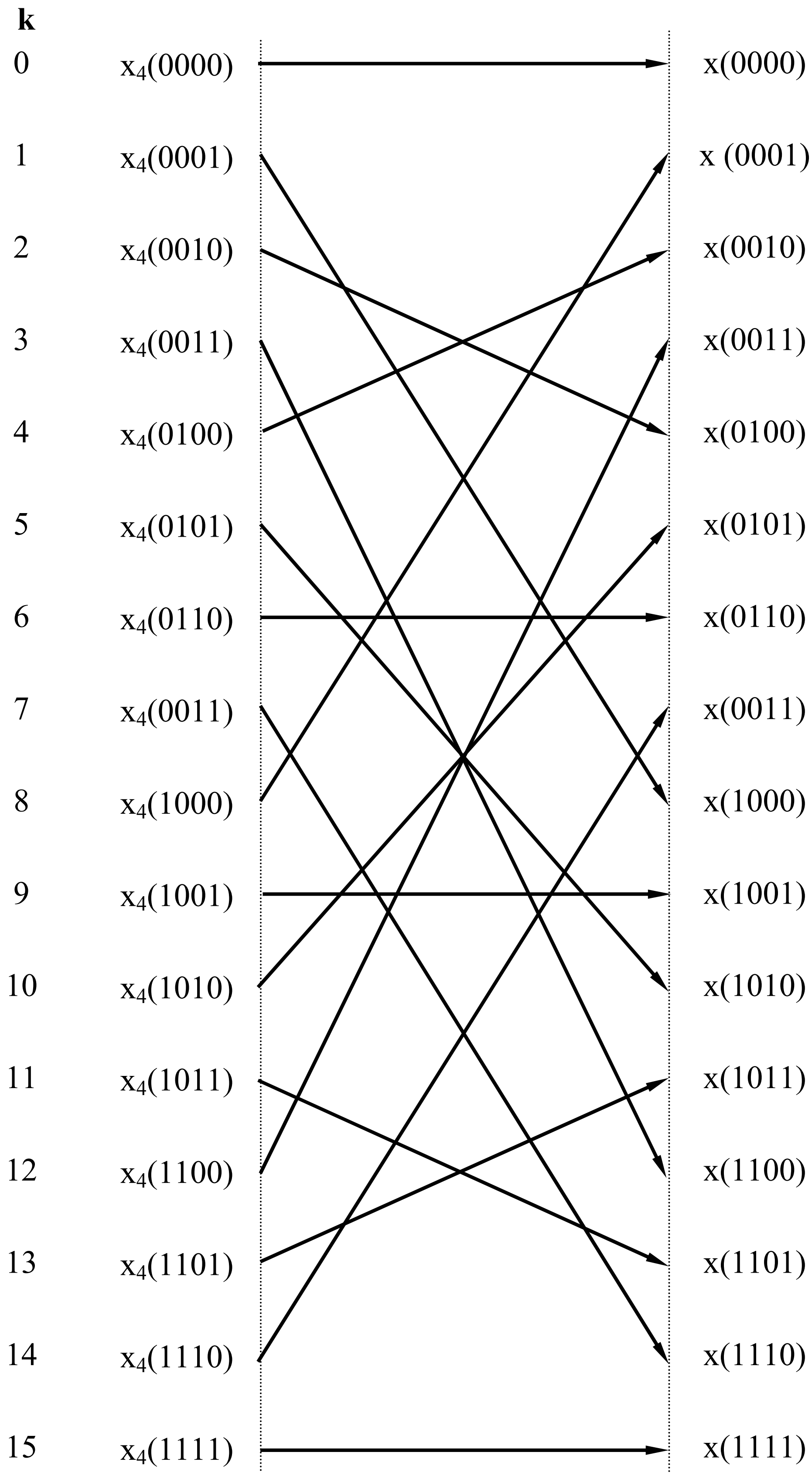


Ilustración VI-4: Ordenación del resultado de una FFT con N = 16

Ejemplo en código ‘C’ del algoritmo de la FFT

```
// Esta función realiza la inversión en la posición de los bits.
// NU = Número de bits, J= Número a tratar.
long BitRev(long J, long NU)
{
 long i,j1,j2,k;

 j1=J;
 k=0;
 for(i=1;i<=NU;i++)
  {
   j2=j1/2;
   k=k*2+(j1-2*j2);
   j1=j2;
  };

 return(k);
};

// Los valores de la FFT los devuelve en el propio vector de entrada.
//  El número de muestras es N=2^UN.
void FFT(complex *X, long N, long NU)
 {
  long    N2,NU1,I,L,K,PAux;
  double  P,Arg;
  complex CArg,T;

  N2=N/2;
  NU1=NU-1;
  K=0;

  // Cálculo de los vectores de cada iteración.
  for(L=1;L<=NU;L++)
   {
    do
     {
      for(I=1;I<=N2;I++)
       {
            PAux =(long)floor((K*1.0)/pow(2.0,NU1));
            P=BitRev(PAux,NU);
            Arg=(2.0*M_PI*P)/(N*1.0);
         CArg = complex(cos(Arg),-sin(Arg));
         T = X[K+N2]*CArg;
         X[K+N2] = X[K]-T;
         X[K]    = X[K]+T;
            K=K+1;
       };
      K=K+N2;
     }while(K<N-1);
    K=0;
    NU1=NU1-1;
    N2=N2/2;
   };

 // Reordenación del resultado final.
 for(K=0;K<N;K++)
  {
   if((I=BitRev(K,NU))>=N)
     printf("Error en la función BITREV");
   if(I>K)
    {
     T = X[K];
     X[K] = X[I];
     X[I] = T;
    };
  };
};
```

VI.4 La Transforma de Fourier en tiempo real

En muchas aplicaciones se hace necesario el cálculo de la Transformada de Fourier de forma que se puedan tomar decisiones en tiempo real. En ingeniería eléctrica, este es el caso de algunos de los equipos de protección de líneas de alta tensión. En estos puede ser necesario realizar un análisis de la forma de la tensión o intensidad con el fin de determinar si se ha presentado alguna contingencia, y en consecuencia, de proceder a disparar o no la protección. La DFT es, como ya se ha visto, una poderosa herramienta para realizar este análisis cuando, por ejemplo, se desea conocer la evolución de la componente fundamental de una onda periódica a lo largo del tiempo. Sin embargo, en este tipo de aplicaciones, el factor tiempo es también determinante, ya que puede ser interesante conocer la evolución de la señal objeto de estudio al mismo tiempo que se produce. Es, en este punto, donde se han invertido grandes esfuerzos, ya sea en la búsqueda de algoritmos que agilicen el cálculo de la DFT, por ejemplo los algoritmos de FFT, como en el desarrollo de un hardware apropiado para este tipo de cálculos , tal es el caso de los DSP.

VI.4.1 La DFT recursiva

Una alternativa a la FFT es el de la DFT recursiva. Tiene como ventaja sobre esta última que sólo es necesario calcular aquellas componentes de frecuencia que se crean de interés para la aplicación, y no todo el espectro como ocurre con la FFT. Para obtener un algoritmo que permita el cálculo recursivo de la DFT, se toma como partida la expresión de la DFT mostrada en apartados anteriores. Mediante esta expresión se calcula el espectro de frecuencias en el instante t = (N-1)T. Para obtener el valor de alguna componente de frecuencia en un instante de tiempo cualquiera, t = iT, se ha de emplear la expresión[1]:

$$\begin{aligned} X(k)\big|_{t=iT} &= \sum_{n=i-N+1}^{i} x(n)e^{-j2\pi k(n-i+N-1)/N} = \sum_{n=i-N+1}^{i} x(n)W^{k(n-i+N-1)} = \\ &= x(i-N+1)+x(i-N+2)W^{k}+x(i-N+3)W^{2k}+\cdots+x(i)W^{(N-1)k} \end{aligned} \qquad \text{(VI.11)}$$

donde:

- $X(k)\big|_{t=iT}$ es el valor de la componente de frecuencia $k\omega_0$ de la función x(t) en el instante iT, calculada mediante la DFT
- W viene dada por la expresión $W = e^{-j2\pi/N}$

Según la expresión recién descrita, para calcular el valor de una determinada componente de frecuencia en un determinado instante de tiempo es necesario realizar todo el sumatorio cada vez. Esto es inoperante desde el punto de vista de tiempo de cálculo, por lo que se intentarán aprovechar el cálculo de las componentes de la DFT en el instante anterior, para el cálculo de la componente actual. Para ello se puede comprobar fácilmente que:

$$X(k)\big|_{t=iT}W^{k} - X(k)\big|_{t=iT-T} = x(i)-x(i-N) \qquad \text{(VI.12)}$$

O lo que es lo mismo:

$$X(k\omega_0)\big|_{t=iT} = \left[X(k\omega_0)\big|_{t=iT-T} + x(iT)-x(iT-NT)\right]e^{j2\pi k/N} \qquad \text{(VI.13)}$$

Esta es la primera expresión recursiva de la DFT, ya que se aprovechan los resultados obtenidos en el instante anterior (t = iT-T) para cálculo de la DFT en el instante actual (t = iT). En donde se puede ver que la reducción del número de operaciones a realizar es evidente.

---

[1] *Para simplificar la notación se supone equivalente poner x(n) ó x(nT), de igual manera se puede poner X(k) ó X(kω_0).*

El principal problema de estos algoritmos recursivos es el comportamiento a largo plazo del algoritmo. La causa está en la representación numérica que se realiza en las computadoras, ya que toda cifra está representada por un número finito de bits, con el redondeo que ello acarrea. Por esto pueden presentarse lo fenómenos de ciclos límite, salidas residuales en ausencia de entrada, inestabilidades…

VI.4.2 La FFT en tiempo Real

La otra posibilidad para la obtención de la DFT en tiempo real es emplear algoritmos de FFT que obtienen ya un espectro de frecuencia completo. La implantación de un sistema de cálculo de la FFT puede llevarse a cabo en dispositivos de cálculo especialmente orientados a este tipo de algoritmos, siendo un ejemplo de este tipo de hardware los conocidos como DSP (Digital Signal Processor). Las principales características de un DSP son:

- Aritmética Rápida. La aplicaciones en tiempo real se basan en la potencia de cálculo de las operaciones de multiplicación y acumulación. La DFT supone una realización continua de productos de suma y multiplicación.
- Sobrecarga Nula en los Bucles. Se puede realizar un bucle (un sumatorio es un bucle) sin que el control del bucle suponga un retardo adicional.
- Búsqueda dual de operandos. Los dos valores que se van a someter a multiplicación son leídos de la memoria al mismo tiempo y, a la vez, en la Unidad Aritmético Lógica, y todo eso con una sola instrucción. Es lo que se conoce como arquitectura Harvard.
- Memorias Circulares. Es una parte reservada de la memoria del DSP en la que se van escribiendo valores de forma que el valor más reciente sustituye al más antiguo. Así se puede tener un histórico de las N últimas muestras que son las que intervendrían en el cálculo de la DFT.

Estas características son las que nos describen una de las herramientas de hardware más populares y eficientes para el cálculo de la FFT.

VII. Empleando la DFT

VII.1 Consideraciones de índole práctico

Para ilustrar el comportamiento de la DFT se van a comparar los espectros obtenidos según la DFT y la Transformada de Fourier sobre la función f(t) (ver Ilustración VII-1) definida a continuación:

$$f(t) = e^{-t} \cdot u(t) = \begin{cases} e^{-t} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \qquad \text{(VII.1)}$$

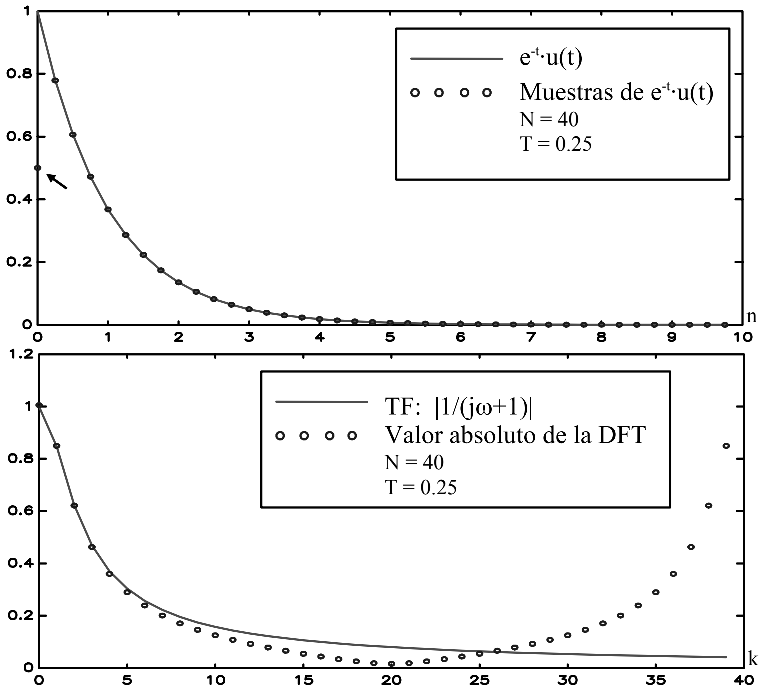


Ilustración VII-1: Aproximación de la Transformada de Fourier de e-t•u(t) mediante la DFT

La función f(t) en t = 0 tiene una discontinuidad, entonces la inversa de la Transformada de Fourier se aproxima al punto medio de dicha discontinuidad, o sea, a: $\frac{1}{2}[f(0^-)+f(0^+)]$. Por lo tanto, a la hora de realizar la discretización de la señal f(t) se utiliza la expresión anterior para resolver la discontinuidad en el origen y se adopta el valor de ½ para f(0). Para la aproximación de la Transformada de Fourier se ha empleado la expresión:

$$F(k\omega_0) = T\sum_{n=0}^{N-1} f(nT)e^{-j2\pi kn/N} \qquad k = 0,1,...,N-1 \qquad \text{(VII.2)}$$

La DFT obtenida de este modo discrepa de la Transformada de Fourier en el rango de frecuencias elevadas. Para reducir este error se tendría que aumentar la frecuencia del muestreo y el número de muestras.

En la Ilustración VII-2 se puede ver el empleo de la DFT para el cálculo de la Transformada de Fourier de la función f(t) = sen(ωt). En este caso para la comparación de los resultados, se ha empleado la expresión:

$$F\left(k\omega_0\right)=\frac{2\pi}{N}\sum_{n=0}^{N-1}f\left(kT\right)e^{-j2\pi kn/N}$$

Si se observan las DFT de la Ilustración VII-1 e Ilustración VII-2, se puede ver que su valor absoluto es simétrico con respecto a N/2. Esto se debe a que el valor absoluto de la Transformada de Fourier es par si la señal es real, y las frecuencias correspondientes al eje negativo estarían entre N/2 y N al realizar la DFT. Siguiendo con el mismo razonamiento, la parte real de la DFT es simétrica con respecto a N/2 y la parte imaginaria es antisimétrica.

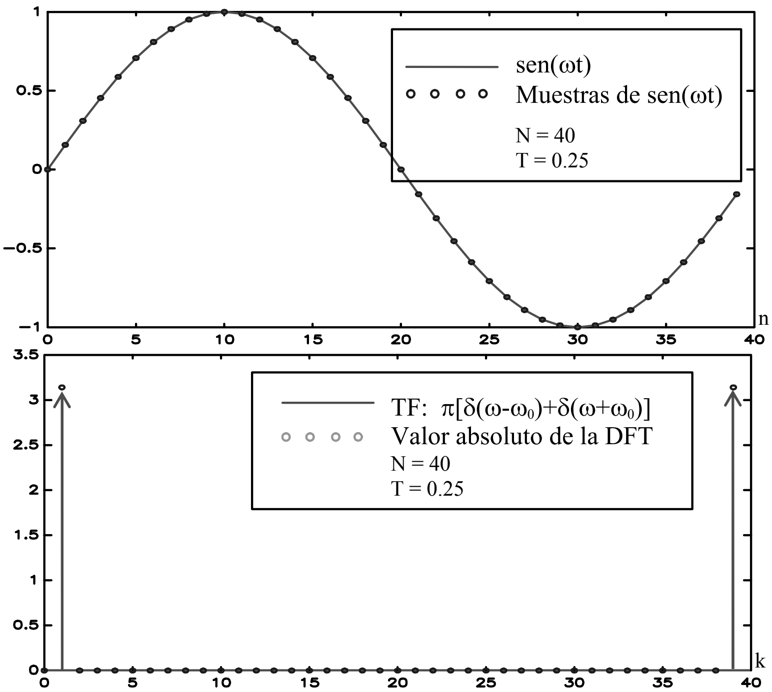


Ilustración VII-2: Aproximación de la Transformada de Fourier de sen(ω_0t) mediante la DFT

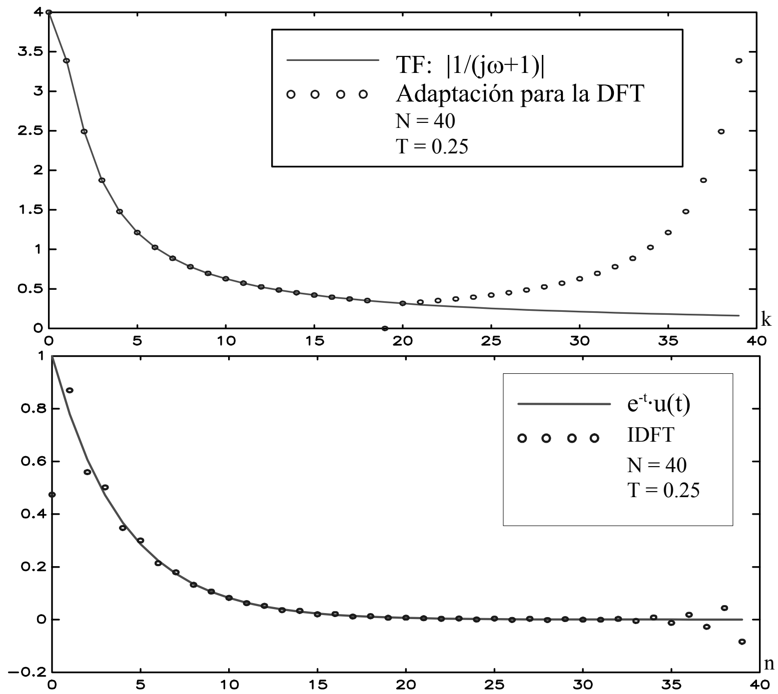


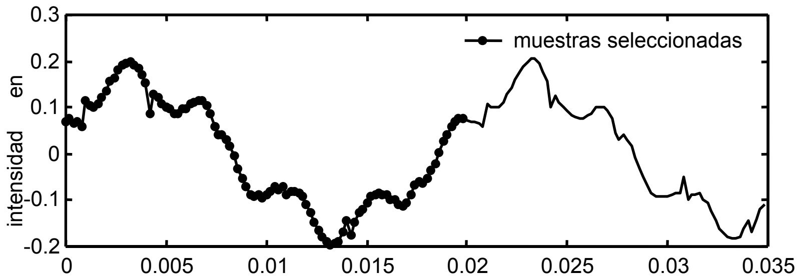
Ilustración VII-3: Empleo de la DFT para la computación de la transformada inversa de Fourier

Cuando se tiene una señal en el dominio de la frecuencia y se desea obtener la correspondiente señal temporal empleando la IDFT, dicha señal ha de sufrir una serie de transformaciones (ver Ilustración VII-3). En primer lugar, si se parte de una señal continua es necesario discretizarla para obtener N/2 valores, los N/2 restantes son obtenidos por la propiedades de simetría de la DFT, o sea, que la parte real (imaginaria) de la DFT es simétrica (antisimétrica) con respecto a N/2 (puede ser necesario hacer que el valor en N/2 de la DFT sea cero). Si la señal original es una Transformada de Fourier hay que multiplicarla por 1/T para que la señal discretizada sea comparable a la DFT. Haciendo que se cumplan estas condiciones, al emplear la expresión de la IDFT se consigue una señal discreta en el dominio del tiempo cuya parte imaginaria es prácticamente nula.

<u>Ejemplo:</u>

Mediante un osciloscopio digital se ha adquirido la onda de intensidad mostrada en la siguiente figura. Se sabe que es una onda periódica y que tiene una frecuencia de 50 Hz, ya que se ha medido en la red eléctrica. La señal ha sido muestreada con un período de 0.2 ms y se han almacenado 175 muestras.

Calcular la amplitud de los coeficientes de Fourier mediante el análisis por DFT.



Resolución:

Al realizar el muestreo de una forma de onda se pueden escoger dos parámetros: la frecuencia de muestreo y el número de muestras, que en el caso de señales periódica han de atender a tres condiciones:

1.- La frecuencia de muestreo ha de ser un múltiplo entero de la fundamental, lo cual en este caso se cumple ya que se muestrea a 5 kHz (1/0.2 ms), que es 100 veces mayor que 50Hz.

2.- La frecuencia de muestreo ha de ser mayor que el doble de la frecuencia máxima no nula presente en el espectro de frecuencia de la señal original. Evidentemente esta condición no se puede satisfacer sin antes conocer el espectro de frecuencia y, por otra parte, el espectro de frecuencia no se puede conocer hasta que se muestree y aplique la DFT. Por ello, el cumplimiento de este punto se evaluará en función de los resultados obtenidos.

3.- El número de muestras ha de abarcar un número entero de ciclos. En este caso de las 175 muestras disponibles, se han seleccionado las 100 primeras (N=100), ya que de esta forma: N×T=100×0.2ms=20ms (1/50 Hz), que se corresponde precisamente con un período de la señal original.

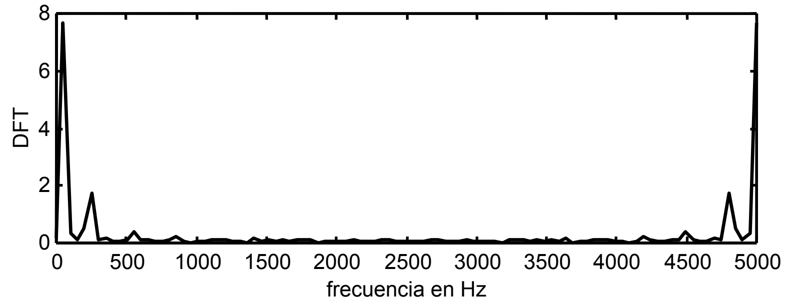
Con las 100 primeras muestras se realiza el cálculo de la DFT, y su resultado son N = 100 valores cuya magnitud se muestra en la gráfica siguiente. En esta gráfica, el eje de frecuencias se ha obtenido como:

$$\mathrm{fr}_0 = \frac{1}{0.2\mathrm{ms}\times 100} = 50\,\mathrm{Hz} \rightarrow \mathrm{fr} \in \{0 \quad 1 \quad \dots \quad N-1\} \times \mathrm{fr}_0 = \{0 \quad 1 \quad \dots \quad 99\} \times 50$$

de forma que cada componente de frecuencia se corresponde con un armónico de la onda periódica.

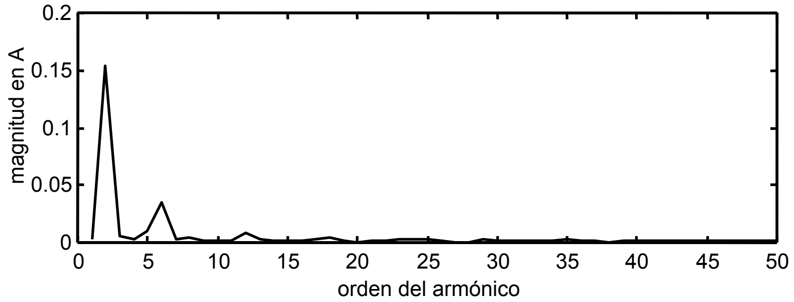
Se ha de tener en cuenta que para realizar la interpretación física del resultado de la DFT sólo se han de considerar aquellas frecuencias que estén por debajo de la mitad de la frequencia de muestreo (ver el capítulo referente al muestreo y propiedades de la DFT). Esto es, aquellas frecuencias que estén por debajo de 2500 Hz. En el entorno de estas frecuencias, la amplitud del espectro obtenido está por debajo del 2% con respecto a la magnitud de la componente

fundamental. Esto se puede interpretar como que la fecuencia de muestreo escogida es adecuada, ya que el fenómeno del "aliasing" se puede considerar reducido, y con esto se resuelve la condición nº 2 mencionada anteriormente.



Finalmente, se puede obtener la magnitud de los primeros 50 (=N/2) armónicos (coeficientes de Fourier), multiplicando por N/2 = 50 el espectro obtenido mediante la DFT. El valor en amperios de las cinco primeras componentes armónicas (ver gráfica inferior) es:

C_1 = 0.1533 A; C_2 = 0.0062 A; C_3 = 0.0028 A; C_4 = 0.0097 A; C_5 = 0.0345 A



VII.2 Reducción del error de la DFT: el empleo de ventanas

Durante el proceso de obtención de la DFT, el truncado en el dominio del tiempo implica una convolución con la función sinc en el dominio de la frecuencia, tal y como puede ver en la Ilustración V-1 (e). Esto ocasiona una distorsión en la DFT, en forma de oscilaciones, que se hace evidente si se compara con la transformada de Fourier que se pretende aproximar. Escogiendo un truncado que abarque un múltiplo entero de períodos de la señal continua, tal y como se ha mostrado en el capítulo V, al realizar el muestreo en frecuencia esta distorsión se anula, ya que las muestras coinciden justamente en los cruces por cero de los lóbulos adyacentes de la función sinc (como se puede observar en la Ilustración VII-4).

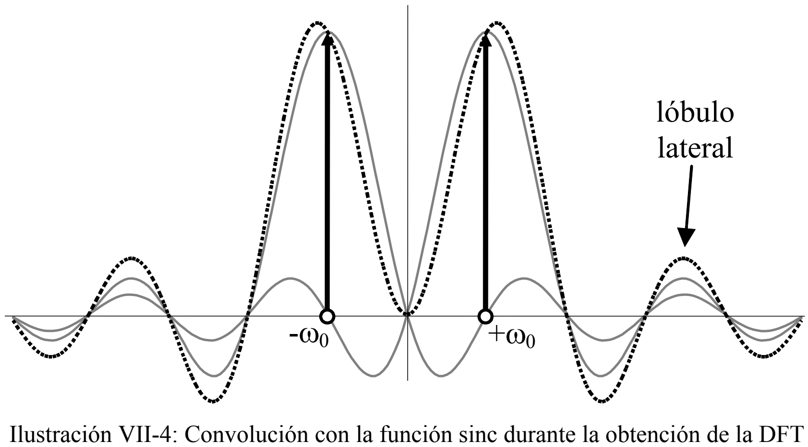


Ilustración VII-4: Convolución con la función sinc durante la obtención de la DFT

La distorsión aparece cuando, al muestrear una señal periódica, se escoge un período de truncado que no es múltiplo del período de la señal continua. Esto provoca que la señal reconstruida a través de la DFT, presente discontinuidades, que alterarán el espectro de frecuencia. Este comportamiento es el que se muestra en la Ilustración VII-6, en la que se puede ver que la DFT resultante tiene unas frecuencias intermedias no nulas como consecuencia de la distorsión introducida. Para disminuir este error se ha de intentar reducir el efecto de distorsión que tiene la convolución con la función sinc. Una posible solución sería la de coger un período de truncado (T_0) lo mayor posible así, la Transformada de Fourier de la función de truncado se parecerá más a un impulso y, de esta forma, la convolución de esta función con cualquier otra apenas introducirá distorsión. Pero debido a las limitaciones de los equipos, en los que el número de muestras posible tiene un límite, ya sea debido a un problema de almacenamiento o de potencia de cálculo, se intenta buscar soluciones menos drásticas. Una alternativa es la de emplear funciones de truncado cuyos lóbulos laterales sean menores que los de la función sinc (Transformada de Fourier del pulso) y así su distorsión será menor, estas son las ventanas.

Las ventanas son funciones de peso que se aplican a las muestras para la reducción de las pérdidas espectrales asociadas con la observación sobre intervalos finitos. Esto es, emplear una ventana significa multiplicar las muestras por unos determinados factores, con el fin de reducir el orden de la discontinuidad en los límites de la expansión periódica (lo que queda después del truncado). Para ello se hacen coincidir las derivadas, de varios órdenes, en los extremos de la señal truncada, de esta forma, la expansión periódica es continua, hasta varios órdenes de derivada, en dichos extremos. El objetivo de las ventanas es que, una vez aplicadas sobre las muestras de una señal de frecuencia arbitraria, el espectro obtenido mediante la DFT tenga componentes de frecuencia cercanas a las de las señal original (antes del muestreo).

La ventana que se introduce en la definición de la DFT es la *ventana rectangular* (ver Ilustración VII-5), mediante la cual estamos aproximando la DFT por un sumatorio finito. Es la mejor aproximación posible mediante mínimos cuadrados (como ya se vio con las Series Finitas de Fourier). Pero este criterio, conveniente desde el punto de vista analítico, presenta problemas numéricos como los asociados con el fenómeno de Gibbs. Observando el espectro de frecuencia de estas señales, se ve que su primer lóbulo lateral está 13dB por debajo del fundamental (esto servirá de referencia para el resto de ventanas).

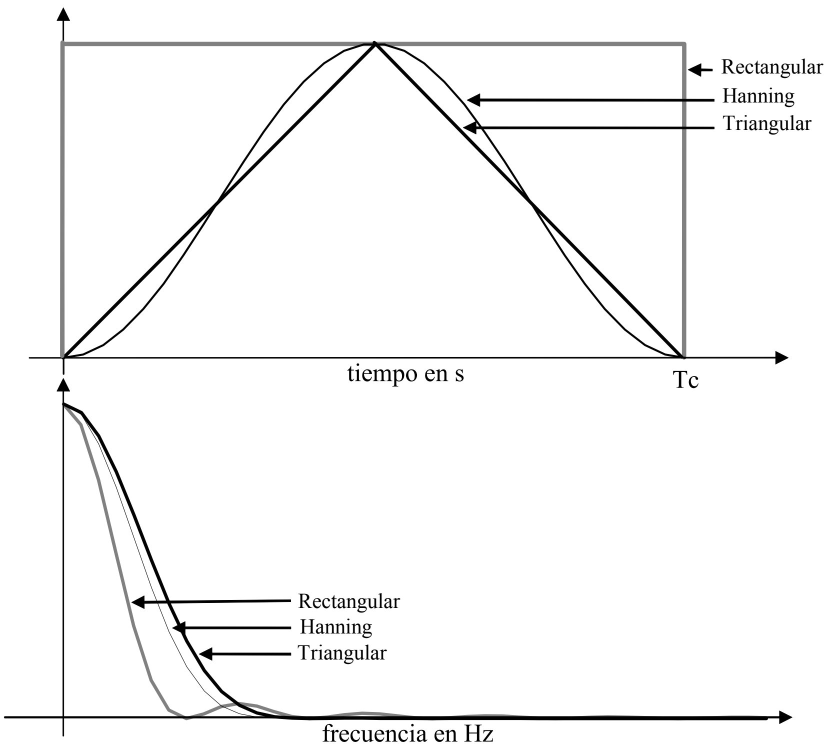


Ilustración VII-5: Comparación entre diferentes ventanas, en el dominio de la frecuencia y el dominio del tiempo

Otro tipo de ventana cuya expresión analítica es muy sencilla es la ventana triangular (ver Ilustración VII-5), cuya expresión es:

$$w(t) = \begin{cases} 2t/T_0 & 0 < t < T_0/2 \\ 2 - 2t/T_0 & T_0/2 < t < T_0 \\ 0 & t < 0 \text{ , } t > T_0 \end{cases} \qquad \text{(VII.3)}$$

Al hacer la Transformada de Fourier de esta función se puede ver que su primer lóbulo lateral está aproximadamente 26dB por debajo del lóbulo principal. Esto tiene una clara influencia en la reducción de las frecuencia intermedias. Por otra parte, el lóbulo principal tiene un ancho muy superior al del lóbulo principal de una ventana rectangular, esto provoca la pérdida de resolución frecuencial. Esta pérdida de resolución es el principal inconveniente del empleo de ventanas.

Un tipo de ventana cuya expresión analítica aunque simple es muy eficaz, es la *ventana de Hanning* (ver Ilustración VII-5), siendo su expresión:

$$w(t) = \begin{cases} 1/2 - 1/2 \cdot \cos(2\pi t/T_0) & 0 < t < T_0 \\ 0 & t < 0 \text{ , } t > T_0 \end{cases} \qquad \text{(VII.4)}$$

Siendo su Transformada de Fourier:

$$W(\omega) = \frac{1}{2} S(\omega) + \frac{1}{4}\left[S(\omega - 2\pi/T_0) + S(\omega + 2\pi/T_0) \right] \qquad \text{(VII.5)}$$

donde S(ω) es la Transformada de Fourier de la función de truncado rectangular, y se puede poner como:

$$S(\omega) = T_0 \frac{\text{sen}(\omega T_0/2)}{\omega T_0/2} e^{-j\omega T_0/2} \qquad \text{(VII.6)}$$

Los lóbulos laterales de las funciones sinc que conforman la función W(ω) están en posición de fase de forma que se anulan, de esta forma sus lóbulos laterales están 32dB por debajo del fundamental. Esta forma de reducir los lóbulos laterales se emplea en otro tipo de ventanas como son la de *Hamming* o *Blackman*.

En la Ilustración VII-6 puede observarse el efecto de la utilización de este tipo de truncado. Ahora las frecuencias intermedias prácticamente desaparecen, y el comportamiento alrededor de las frecuencias fundamentales sigue siendo bueno, siempre y cuando estas estén suficientemente alejadas, debido a la pérdida de resolución frecuencial. En la Ilustración VII-7 se muestra la aplicación de las ventanas cuando el número de ciclos de la señal original es mayor.

En la Ilustración VII-8 se muestra un caso real, donde se ha adquirido con una frecuencia de muestreo de 2 kHz la forma de onda de la intensidad a la salida de un aerogenerador aislado. En este caso la frecuencia de red calculada empleando la DFT es de 48.8 Hz y mediante la aplicación de una ventana de Hanning se resaltan las principales componentes de frecuencia.

Hasta aquí se han descrito algunos de los tipos de ventanas más empleadas, existen, no obstante, otras muchas como son la Gausiana, Dolph-Chebychev, Kaiser o Lifter

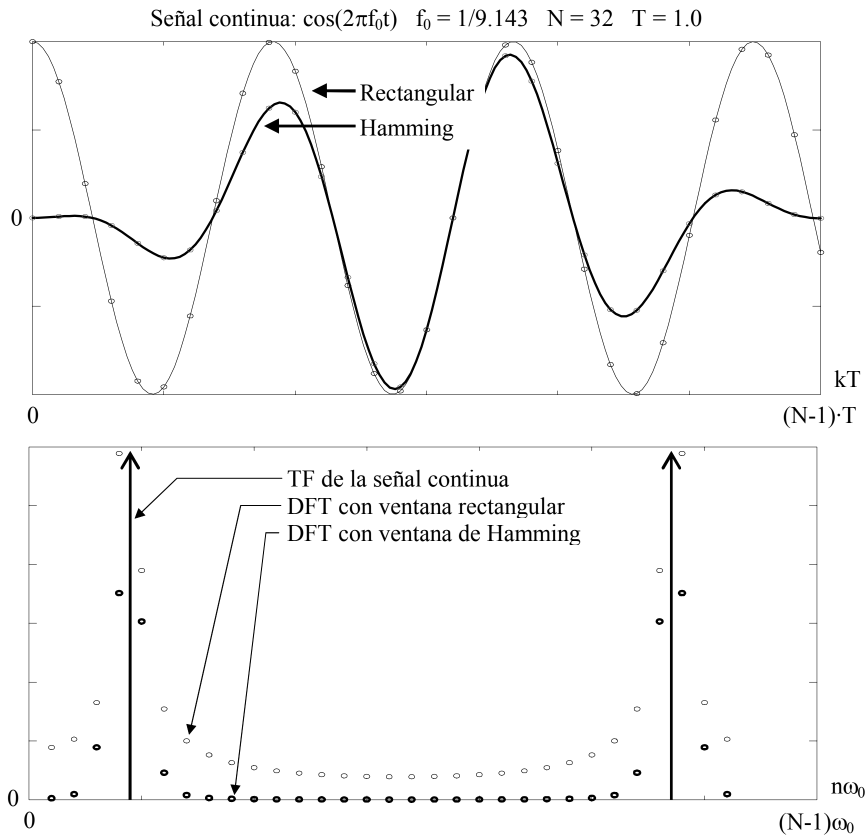


Ilustración VII-6: Efecto de la aplicación de la ventana rectangular y de Hanning

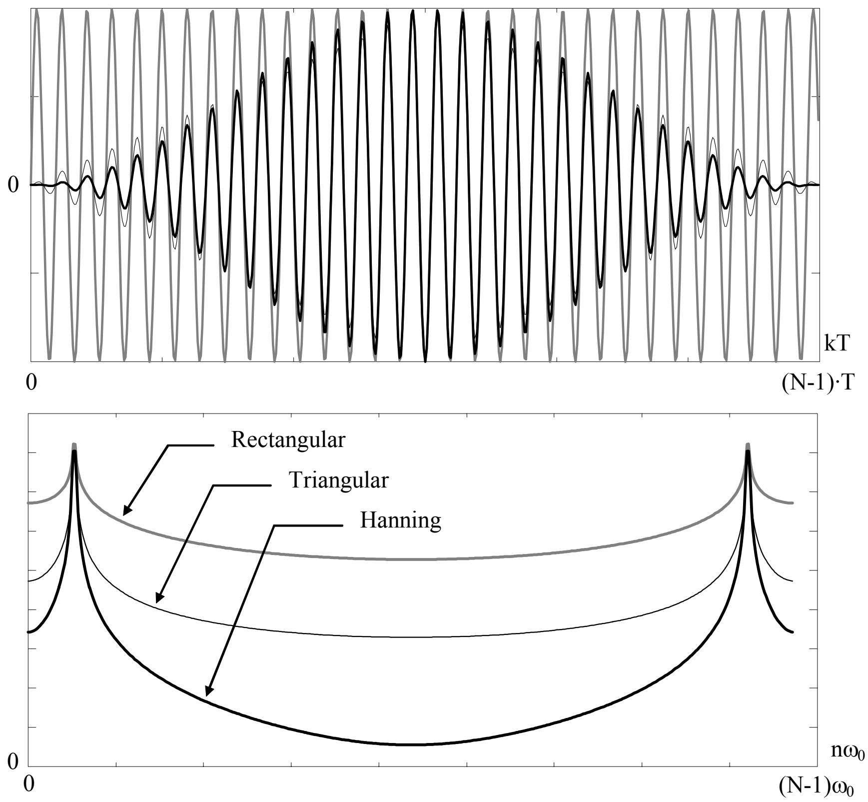


Ilustración VII-7: Efecto de las ventanas sobre una función sinusoidal

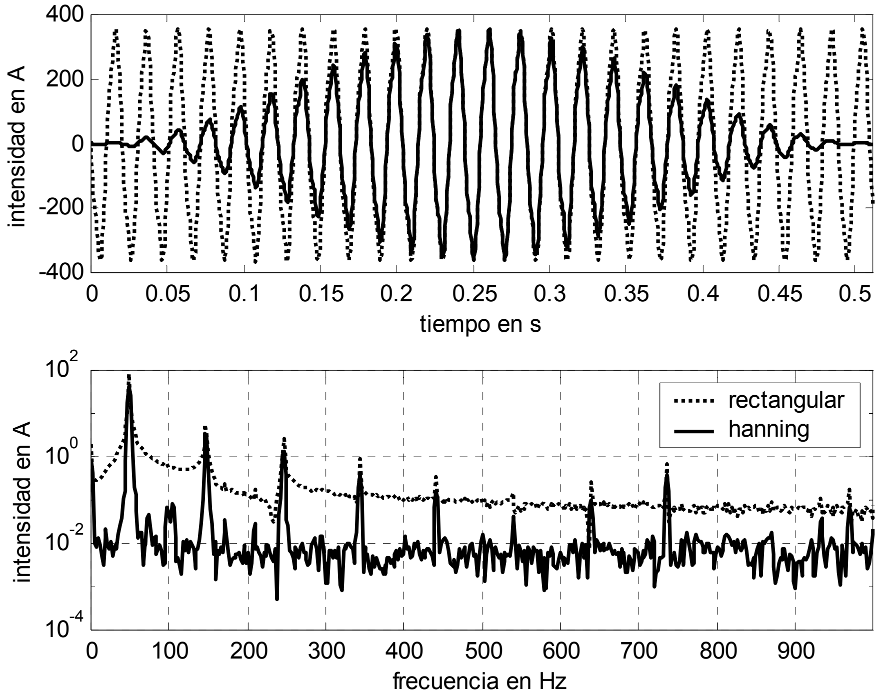


Ilustración VII-8: Análisis mediante DFT de la intensidad a la salida de un aerogenerador aislado

VIII. Aplicación de la Transformada de Fourier al estudio de sistemas lineales

VIII.1 Los sistemas lineales invariantes

Un sistema lineal es aquel al que se le puede aplicar el principio de superposición, o sea, que si una determinada función de entrada es combinación lineal de varias funciones, su respuesta es combinación lineal de las respuestas a cada una de las funciones que forman parte de la entrada.

Otra definición de sistema lineal es que la función de la excitación, $f_i(t)$, y la función respuesta, $f_o(t)$, del sistema, están relacionadas por una ecuación diferencial lineal, es decir:

$$a_n \frac{d^n f_o(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} f_o(t)}{dt^{n-1}} + ... + a_0 f_o(t) = b_m \frac{d^m f_i(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} f_i(t)}{dt^{m-1}} + ... + b_0 f_i(t) \quad \text{(VIII.1)}$$

Un sistema es invariante si dada la respuesta $f_o(t)$ a una determinada entrada $f_i(t)$, la respuesta a $f_i(t\text{-}t_0)$ es $f_o(t\text{-}t_0)$, o de forma equivalente, si los coeficientes a_i y b_i en (VIII.1) permanecen constantes. Por notación, se asociará al sistema lineal invariante el operador $L\{\}$, de forma que:

$$L\{f_i(t)\} = f_o(t) \quad \text{(VIII.2)}$$

VIII.2 La respuesta en estado estacionario

La respuesta estacionaria de un sistema lineal invariante a una función de tipo exponencial $e^{j\omega_0 t}$, es también una función exponencial que se puede poner en función de $H(\omega)$ como:

$$L\{e^{j\omega_0 t}\} = H(\omega_0) \cdot e^{j\omega_0 t} \quad \text{(VIII.3)}$$

Este resultado se basa en la propiedad de la derivada de una exponencial compleja, que afirma que:

$$\frac{d^n e^{kt}}{dt^n} = k^n e^{kt} \quad \text{(VIII.4)}$$

De esta forma, si en la ecuación diferencial anterior, se sustituye el operador derivada d/dt por $j\omega_0$, se obtiene una expresión polinonial que relaciona la entrada con la salida:

$$e^{j\omega_0 t} \cdot \sum_{k=0}^{n} a_k (j\omega_0)^k = f_o(t) \sum_{k=0}^{m} b_k (j\omega_0)^k \quad \text{(VIII.5)}$$

O puesto de otra forma:

$$L\{e^{j\omega_0 t}\} = H(j\omega_0) e^{j\omega_0 t} \quad \text{(VIII.6)}$$

donde, $H(j\omega_0)$ es la llamada función del sistema, y su expresión es:

$$H(j\omega_0) = \sum_{k=0}^{n} b_k (j\omega_0)^k \Big/ \sum_{k=0}^{m} a_k (j\omega_0)^k \quad \text{(VIII.7)}$$

y es, en general, un número complejo que se puede representar como:

$$H(j\omega_0) = R(j\omega_0) + jX(j\omega_0) = |H(j\omega_0)| \measuredangle \phi(j\omega_0)$$

Para obtener la respuesta sinusoidal en estado estacionario de un sistema lineal se pueden emplear las expresiones:

$$\begin{aligned} L\{\cos\omega_0 t\} &= \mathrm{Re}\left[H(j\omega_0)\cdot e^{j\omega_0 t}\right] = |H(j\omega_0)|\cdot\cos\left[\omega_0 t + \phi(\omega_0)\right] \\ L\{\mathrm{sen}\,\omega_0 t\} &= \mathrm{Im}\left[H(j\omega_0)\cdot e^{j\omega_0 t}\right] = |H(j\omega_0)|\cdot\mathrm{sen}\left[\omega_0 t + \phi(\omega_0)\right] \end{aligned} \qquad \text{(VIII.8)}$$

En función de estos resultados se puede calcular la respuesta en estado estacionario de un sistema lineal a una función periódica cualquiera f(t), cuyo período sea T ($\omega_0=2\pi/T$), a partir de su descomposición en Serie de Fourier, tal y como se puede ver la Tabla VIII-1.

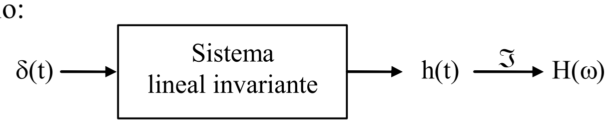
Tabla VIII-1: Diferentes formas de presentar la respuesta en estado estacionario

Entrada	$f_i(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n \cdot e^{jn\omega_0 t}$
Salida	$f_o(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n H(jn\omega_0) e^{jn\omega_0 t}$
Entrada	$f_i(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n)$
Salida	$f_o(t) = C_0 H(0) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \|H(jn\omega_0)\| \cos(n\omega_0 t - \theta_n + \phi(n\omega_0))$
Entrada	$f_i(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos n\omega_0 t + b_n\,\mathrm{sen}\,n\omega_0 t\right]$
Salida	$f_o(t) = \frac{a_0}{2} H(0) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n R(jn\omega_0)\cos n\omega_0 t + b_n X(jn\omega_0)\,\mathrm{sen}\,n\omega_0 t\right]$

VIII.3 La respuesta de un sistema lineal

Para obtener la respuesta de un sistema lineal a una función cualquiera, basta con conocer la respuesta del sistema a un impulso unitario:

$$L\{\delta(t)\} = h(t) \xrightarrow{\mathfrak{I}} H(\omega)$$



A partir de este resultado, se puede obtener la respuesta del sistema, $f_o(t)$, a una función cualquiera, $f_i(t)$, de dos formas, que son:

1.- Mediante convolución con la respuesta impulsional h(t), o sea:

$$f_o(t) = h(t) * f_i(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau) f_i(\tau)\, d\tau \qquad \text{(VIII.9)}$$

2.- Aplicando el teorema de convolución:

$$F_o(\omega) = H(\omega)\cdot F_i(\omega) \qquad \text{(VIII.10)}$$

donde $F_o(\omega)$, $F_i(\omega)$ y $H(\omega)$ son las transformadas de Fourier de $f_o(t)$, $f_i(t)$ y h(t) respectivamente.

Además se puede demostrar que la función del sistema obtenida como se indica en el apartado anterior, es igual a la transformada de la respuesta al impulso, o sea:

$$H(j\omega) = H(\omega) \qquad \text{(VIII.11)}$$

De la observación de la respuesta a un impulso se puede deducir si un sistema es no realizable físicamente. Si cuando t<0 resulta que h(t) ≠ 0, entonces se dice que el sistema es no causal y por lo tanto no realizable físicamente, ya que esto supondría que el sistema tendría una respuesta distinta de cero antes de que se produzca un valor distinto de cero en la entrada. Es como si el sistema se anticipase a la entrada, lo cual no es posible en los sistemas físicos. Si, por el contrario, h(t) = 0 si t<0 se dice que el sistema es causal. Por ejemplo, el filtro ideal cuya función del sistema es un pulso, tiene un respuesta impulsional tal que h(t) ≠ 0 si t<0, y es, por lo tanto un sistema no causal, no realizable físicamente.

Ejemplo:

Sea el sistema mecánico definido por la ecuación diferencial:

$$m\cdot\ddot{x}(t)+b\cdot\dot{x}(t)+k\cdot x(t)=f(t)$$

1.º Plantear sus ecuaciones en el dominio de la frecuencia.

2.º Con m = 10 kg, b = 5 kg/sg y k = 2 Kg/sg², calcular la respuesta cuando la entrada f(t) tiene la expresión: $f(t)=A\,\mathrm{sen}\left(\omega_0 t+\frac{\pi}{2}\right)$ con A = 1N y ω_0 = 10 rad/sg.

Resolución:

1º Si llamamos X(ω) a la transformada de Fourier de x(t) y F(ω) la transformada de Fourier de f(t), se obtienen las siguientes expresiones:

$$m(j\omega)^2 X(\omega)+b\cdot j\omega X(\omega)+k\cdot X(\omega)=F(\omega)$$

Operando sobre esta ecuación se obtiene:

$$\left(k-m\omega^2+jb\omega\right)X(\omega)=F(\omega)\quad\Rightarrow\quad X(\omega)=F(\omega)\frac{1}{k-m\omega^2+jb\omega}$$

La función de transferencia o la transformada de la respuesta a un impulso se puede poner como:

$$H(\omega)=\frac{1}{k-m\omega^2+jb\omega}$$

2º Utilizando la función de transferencia H(ω) recién descrita, y para ω_0 = 10 rad/sg

$$H(\omega_0)=\frac{1}{k-m\omega_0^2+jb\omega_0}\Rightarrow H(10)=\frac{1}{2-10\cdot10^2+j2\cdot10}=\frac{1}{-998+20j}=998,20\angle 3,12\text{rad}$$

Por lo tanto la respuesta es:

$$x(t)=\left|H(\omega_0)\right|A\,\mathrm{sen}\left(\omega_0 t+\alpha+\phi(\omega_0)\right)=998,20\,\mathrm{sen}\left(10t+\tfrac{\pi}{2}+3,12\right)$$

VIII.4 Aplicación de la Transformada de Fourier a la Resolución de Circuitos Eléctricos en Régimen Estacionario

Ejemplos típicos de sistemas lineales invariantes son los circuitos eléctricos lineales en régimen estacionario. Se puede plantear la respuesta del circuito de la Ilustración VIII-1, como:

$$e(t)=Ri(t)+L\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau \qquad \text{(VIII.12)}$$

Sustituyendo el operador d/dt por jω se obtiene la relación:

$$H(\omega)=\frac{1}{Z(\omega)}=\frac{1}{R+j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)} \qquad \text{(VIII.13)}$$

Se puede obtener la respuesta en estado estacionario a una entrada cualquiera, como:

$$e(t)\xrightarrow{\Im}E(\omega)\Rightarrow I(\omega)=H(\omega)E(\omega)\Rightarrow\ I(\omega)\xrightarrow{\Im^{-1}}i(t) \qquad \text{(VIII.14)}$$

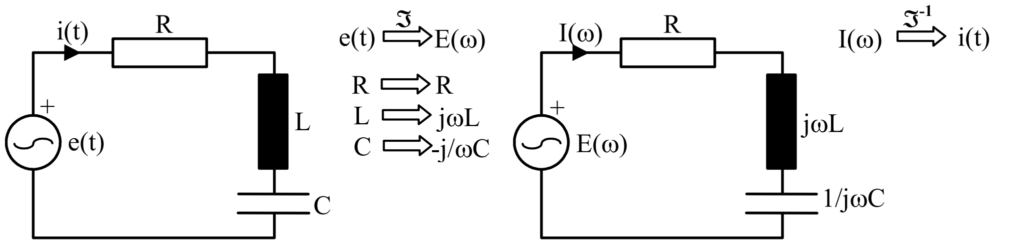


Ilustración VIII-1: Resolución de un circuito eléctrico lineal mediante su equivalente en el dominio de la frecuencia.

De forma más general, la resolución de un circuito mediante la Transformada de Fourier se puede realizar mediante un circuito equivalente, donde los elementos originales se reemplacen por los correspondientes en el dominio de la frecuencia (ver Ilustración VIII-1). O sea, las fuentes se sustituyen por otras fuentes cuya expresión es la Transformada de Fourier de la primera $e(t)\rightarrow E(\omega)$. Por otra parte, las ecuaciones para bobinas y condensadores son, respectivamente:

$$v(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}i(\tau)d\tau \qquad \text{(VIII.15)}$$

$$i(t)=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t}v(\tau)d\tau \qquad \text{(VIII.16)}$$

Que se pueden expresar en el dominio frecuencial como:

$$V(\omega)=\frac{1}{j\omega C}I(\omega) \qquad \text{(VIII.17)}$$

$$I(\omega)=\frac{1}{j\omega L}V(\omega) \qquad \text{(VIII.18)}$$

donde C es la capacidad del condensador y L la inductancia de la bobina.
En el caso de una resistencia de valor R, su equivalente frecuencial es:

$$v(t)=Ri(t)\rightarrow V(\omega)=RI(\omega) \qquad \text{(VIII.19)}$$

En el paso de unas ecuaciones a otras se emplean las siguientes propiedades de la Transformada de Fourier:

$$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau\ \xrightarrow{\Im}\ \frac{1}{j\omega}X(\omega)+\pi X(0)\delta(\omega) \qquad \text{(VIII.20)}$$

$$\frac{dx(t)}{dt}\ \xrightarrow{\Im}\ j\omega X(\omega) \qquad \text{(VIII.21)}$$

Según se deduce de la propiedad mostrada en la (VIII.20), el modelo equivalente mostrado en el circuito de la Ilustración VIII-1 es válido siempre y cuando las excitaciones del circuito tengan media nula, o sea, que $X(\omega)|_{\omega=0}=0$ para todas las fuentes del circuito. Esto es lo que ocurre en Régimen Estacionario Sinusoidal o Circutos de Corriente Alterna, donde todas las excitaciones del circuito son sinusoidales y, por lo tanto, su media es nula.

A modo de resumen, los pasos para la obtención de la respuesta en régimen permanente de un circuito en régimen estacionario mediante el empleo de la Transformada de Fourier son:

Obtención del circuito equivalente en el dominio de la frecuencia (L pasa a ser jωL, …)

- Las fuentes se sustituyen por otras del mismo tipo cuya expresión es la Transformada de Fourier de las primeras (e(t) pasa a ser E(ω), …).
- El circuito obtenido se resuelve por mallas, nudos, … o cualquier otro método de análisis.
- Finalmente se halla la Transformada de Fourier inversa de aquellas variables de las que se desee conocer su expresión temporal ($i(t) = \mathfrak{I}^{-1}\{I(\omega)\}$).

VIII.5 Aplicación de la Transformada de Fourier a la Resolución de Circuitos Eléctricos en Régimen Transitorio

El proceso descrito en el apartado anterior se aplica para el estudio en estado estacionario de los sistemas lineales. Para el estudio de los regímenes de funcionamiento transitorios se han de tener en cuenta las condiciones iniciales de los distintos elementos y, por consiguiente, las ecuaciones de la inductancia y capacitancia son (ver Ilustración VIII-2):

$$v(t) = V_0 + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)\,d\tau \qquad \text{(VIII.22)}$$

$$i(t) = I_0 + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(\tau)\,d\tau \qquad \text{(VIII.23)}$$

donde V_0 e I_0 son las condiciones iniciales en el instante t_0.

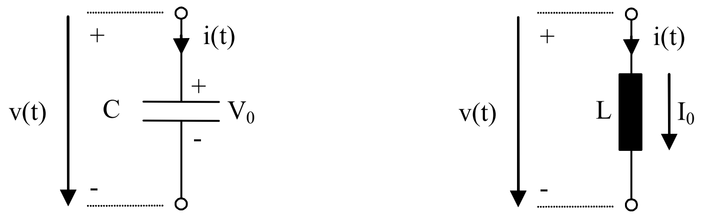


Ilustración VIII-2: Representación del condensador y la bobina en el dominio temporal

Para poder calcular la Transformada de Fourier de la integral se ha de conseguir que los límites de las integrales que aparecen en la (VIII.22) y en la (VIII.23) vayan de -∞ a t. Lo cual se realiza mediante la multiplicación de las expresiones anteriores por el escalón desplazado al instante en el que se consideran las condiciones iniciales, de forma que:

$$v(t)u(t-t_0) = V_0 \cdot u(t-t_0) + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\cdot u(\tau - t_0)\,d\tau \qquad \text{(VIII.24)}$$

$$i(t)u(t-t_0) = I_0 \cdot u(t-t_0) + \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v(\tau)\cdot u(\tau - t_0)\,d\tau \qquad \text{(VIII.25)}$$

donde u(t) es la función escalón unitario, entonces:

$$u(t-t_0) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ 1 & t > t_0 \end{cases} \qquad \text{(VIII.26)}$$

De esta forma se tiene que, para $t < t_0$, $v(t)u(t-t_0) = 0$ y para valores mayores de t el valor de v(t) es el mismo que con la (VIII.22), de modo que dicha ecuación es equivalente a la (VIII.24) para $t>t_0$. Análogamente, la (VIII.23) y la (VIII.25) son equivalentes.

En las ecuaciones temporales recién obtenidas ya es posible emplear la Transformada de Fourier, y suponiendo que todas las excitaciones tiene media nula, se llega a:

$$V(\omega) = V_0 U(\omega) + \frac{1}{j\omega C} I(\omega) \tag{VIII.27}$$

$$I(\omega) = I_0 U(\omega) + \frac{1}{j\omega L} V(\omega) \tag{VIII.28}$$

donde:

- U(ω) es la transformada del escalón unitario: $U(\omega) = \Im[u(t)] = -j/\omega + \pi\delta(\omega)$
- I(ω) y V(ω) son las transformadas de $i(t)u(t-t_0)$ y $v(t)u(t-t_0)$, respectivamente.

Los componentes asociados a estas expresiones pueden verse en la Ilustración VIII-3.

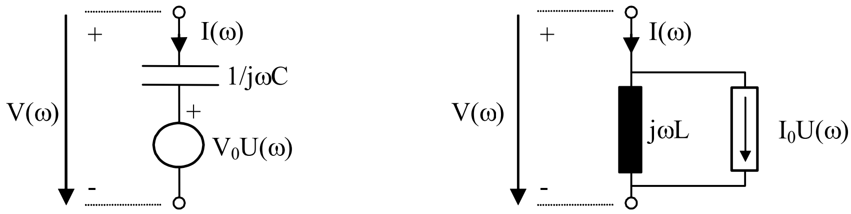


Ilustración VIII-3: El condensador y la bobina en el dominio frecuencial. Condiciones iniciales: escalones.

En ambos se tienen las condiciones iniciales como funciones de tipo escalón, pero pueden transformarse a funciones impulso sin más que tener en cuenta que:

$$j\omega U(\omega) = \Im[\delta(t)] = D(\omega) \Leftrightarrow \frac{du(t)}{dt} = \delta(t) \tag{VIII.29}$$

Los resultados de esta operación se pueden ver en la Ilustración VIII-4.

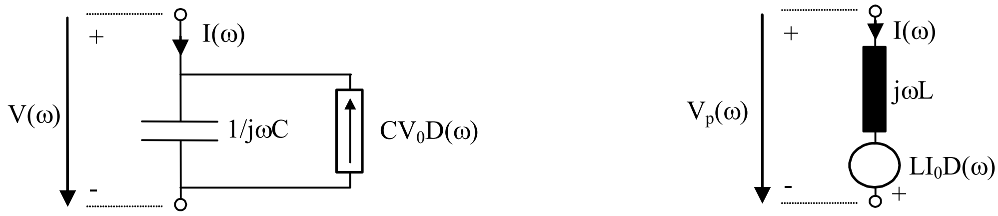


Ilustración VIII-4: El condensador y la bobina en el dominio frecuencial. Condiciones iniciales: impulsos.

Una vez llegado a este punto ya se puede obtener el circuito equivalente en el dominio de la frecuencia, y se procede de igual manera que en el apartado anterior.

VIII.5.1 Ejemplo de aplicación

En este apartado se muestra como se aplica la Transformada de Fourier para la resolución de un circuito eléctrico lineal, en el que aparece un fenómeno transitorio.

El circuito tomado a modo de ejemplo es el que aparece en la Ilustración VIII-5 donde el interruptor S lleva abierto un tiempo indefinido ($-\infty<t<t_0$). En el instante $t=t_0$ se cierra S con lo que se conecta el condensador al circuito, originandose el fenómeno transitorio al que se hacía mención.

Para calcular las variables (por ejemplo i(t) y v(t)) de este circuito el análisis se resolverá en dos partes, que corresponde al circuito antes y después del cierre del interruptor.

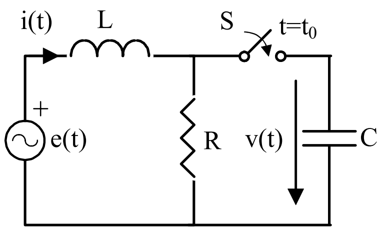


Ilustración VIII-5: Esquema del circuito.

Para. $-\infty<t<t_0$ el circuito se sustituye directamente por su equivalente en el dominio de la frecuencia, teniendo en cuenta que las condiciones iniciales de todos los elementos son nulas.

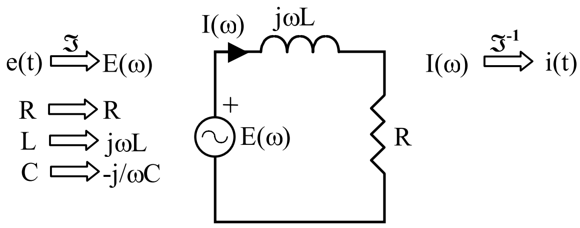


Ilustración VIII-6: Equivalente frecuencial para $t<t_0$.

En el circuito de la Ilustración VIII-6, E(ω) e I(ω) representan las transformadas de Fourier de e(t) e i(t) respectivamente. El valor de la intensidad en la bobina y la tensión en el condensador obtenidos en este apartado, y evaluados en $t=t_0$, constituirán las condiciones iniciales para el estudio del circuito con el interruptor cerrado. O sea que:

$$I_0 = i(t)\big|_{t=t_0} \qquad V_0 = v(t)\big|_{t=t_0} = 0 \qquad \text{(VIII.30)}$$

Para. $t>t_0$ el circuito en cuestión se sustituye por uno en el que estén contempladas las condiciones iniciales de la bobina (I_0) y el condensador (V_0). Se ha de tener en cuenta que, para poder transformar el circuito en su equivalente frecuencial, todas las variables deben estar multiplicadas por un escalón situado en el instante en el que se dan las condiciones iniciales, tal y como se muestra en la Ilustración VIII-7. La solución de este circuito y el de partida es la misma para el intervalo de tiempo objeto de estudio.

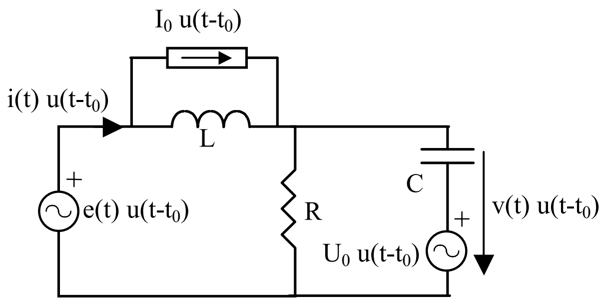


Ilustración VIII-7: Circuito temporal para el estudio en $t>t_0$.

Una vez descrito cuál es el circuito temporal en el que se ha incluido la función escalón $u(t-t_0)$ se puede obtener directamente el circuito de la Ilustración VIII-8 sin más que tener en cuenta que:

- U(ω) es la transformada de Fourier del escalón $u(t-t_0)$
- E(ω),V(ω) e I(ω) son la Transformada de Fourier de $e(t)u(t-t_0)$, $v(t)u(t-t_0)$ e $i(t)u(t-t_0)$, respectivamente.

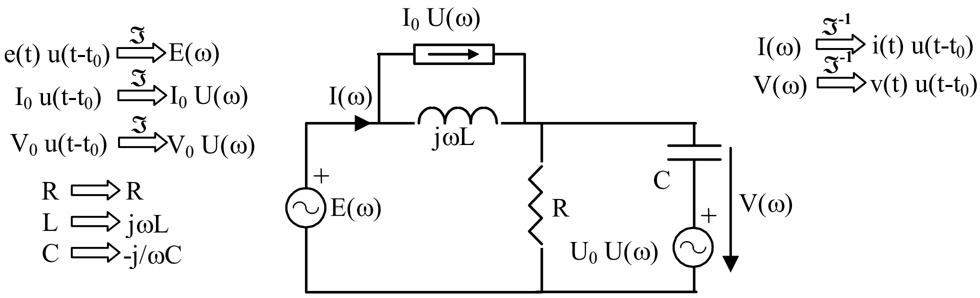


Ilustración VIII-8: Equivalente en el dominio de la frecuencia.

Este circuito se puede resolver mediante cualquier método de análisis de circuitos (mallas, nudos, …) con lo que se obtienen los valores de V(ω) e I(ω). A partir de estos se pueden obtener los valores de v(t) e i(t) para $t>t_0$.

Dependiendo del análisis a realizar se pueden transformar las fuentes de tensión (o intensidad) en fuentes de intensidad (o tensión), teniendo en cuenta que pasan de estar multiplicadas por escalones $u(t-t_0)$ a estar multiplicadas por impulsos $\delta(t-t_0)$. Si se quiere resolver el circuito de la Ilustración VIII-8 mediante mallas, se ha de emplear entonces el circuito de la Ilustración VIII-9, donde D(ω) es la Transformada de Fourier de $\delta(t-t_0)$.

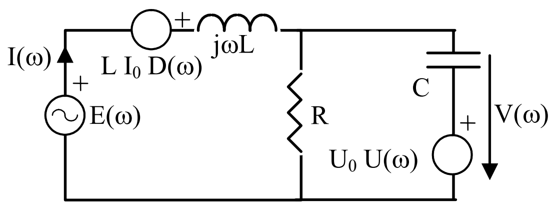


Ilustración VIII-9: Equivalente para la aplicación del método de mallas.

VIII.6 Aplicación de la DFT a la resolución de sistemas lineales

Una vez planteadas las ecuaciones para la resolución de circuitos mediante la Transformada de Fourier, hay que hacer una serie de modificaciones para poder emplear la DFT. Una de las razones para ello es la periodicidad implícita que conlleva el empleo de la DFT. Por ejemplo, si la entrada a un circuito es un escalón, al emplear la DFT se calculará la respuesta estacionaria del circuito como si la entrada fuese una onda cuadrada.

En el apartado anterior se vio que las excitaciones han de estar multiplicadas por escalones unitarios. Al emplear la DFT se tienen que discretizar y truncar estos escalones, y para que el error cometido con estas acciones sea lo más pequeño posible, se ha de abarcar una muestra lo más representativa posible de la señal original. De todas formas no se puede olvidar que al hacer análisis mediante la DFT, en vez del escalón, se está considerando una onda cuadrada de período el intervalo de truncado T_0. Es por esto que se ha de escoger un valor de T_0 suficientemente elevado como para permitir el establecimiento del régimen permanente del sistema durante un período de la onda cuadrada, de esta forma no se distorsiona el resultado alcanzado empleando la DFT.

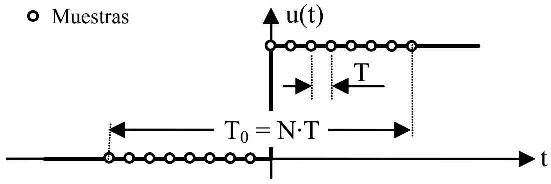


Ilustración VIII-10: Ejemplo de muestreo y truncado de la función escalón (N=16).

La función impulso es, como se vio cuando se desribieron los sistemas lineales, una función muy importante en el análisis de circuitos eléctricos, en cambio, su representación discreta (truncado más discretización) es problemática por la discontinuidad que presenta. Para obviar este problema se define como la derivada de la función escalón, o sea:

$$u(t) \xrightarrow{\Im} U(\omega) \tag{VIII.31}$$

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \xrightarrow{\Im} D(\omega) = j\omega U(\omega) \xrightarrow{DFT} D_{DFT}(k\omega_0) \tag{VIII.32}$$

donde se ha de tener en cuenta que para pasar de la Transformada de Fourier a la DFT se ha de muestrear la primera y aplicar las condiciones de simetría de la DFT.

Con la transformada discreta de la función escalón y la función impulso se pueden obtener las ecuaciones del condensador y bobina en el dominio de la frecuencia empleando la DFT:

$$V_{DFT}(k\omega_0) = V_0 U_{DFT}(k\omega_0) + Z_{DFT,c}(k\omega_0) I_{DFT,p}(k\omega_0) \tag{VIII.33}$$

$$I_{DFT}(k\omega_0) = I_0 U_{DFT}(k\omega_0) + Z_{DFT,L}(k\omega_0) V_{DFT,p}(k\omega_0) \tag{VIII.34}$$

donde $Z_{DFT,C}(k\omega_0) = 1/jk\omega_0 C$ y $Z_{DFT,L}(k\omega_0) = 1/jk\omega_0 L$ son las impedancias en frecuencia discreta del condensador y bobina respectivamente.

Nota:

1.- En las ecuaciones alcanzadas para el análisis mediante la DFT, se ha considerado nula la media de las funciones de excitación.

2.- Pueden aparecer expresiones del tipo $X(\omega)/\omega$, en las que $X(0) = 0$. Por lo tanto, en $\omega = 0$ se tiene una indeterminación. Para resolverla se puede emplear la regla de L'Hospital, de forma que:

$$\lim_{\omega \to 0} \frac{X(\omega)}{\omega} = \left. \frac{dX(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega \to 0} \tag{VIII.35}$$

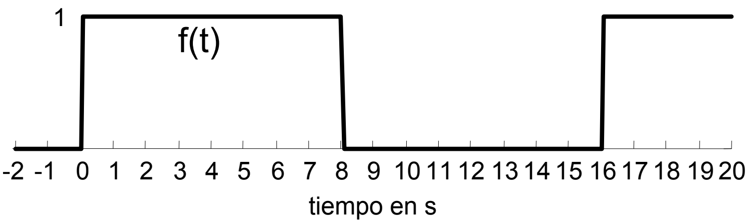
A su vez, para el cálculo de la derivada de $X(\omega)$ es posible utilizar la propiedad de la Transformada de Fourier que dice que:

$$t \cdot x(t) \xrightarrow{\Im} j \frac{dX(\omega)}{d\omega} \tag{VIII.36}$$

Esta indeterminación es muy típica, ya que por ejemplo en una bobina con condiciones iniciales nulas, se llega a la expresión: $I(\omega) = V(\omega)/j\omega L$.

VIII.6.1 Ejemplo de utilización de la DFT a la resolución de un sistema lineal

Para la onda cuadrada mostrada a continuación y cuyo período es de 16 s, se va a calcular su respuesta a un sistema caracterizado por: $H(\omega) = 1/(1 + j\omega)$.



Para el cálculo de la respuesta se seguirán los siguientes pasos:

1º Tomamos N puntos **que abarquen un ciclo y equidistantes entre sí** de la forma de onda a estudiar. Cuantos más puntos más exacto será el resultado, pero en cambio necesitaremos más cálculo. En el ejemplo si tomamos una muestra cada 2 segundos comenzando en t = 0 obtendremos 8 valores (N = 8) con lo que tendremos el siguiente vector:

f = [1 1 1 1 0 0 0 0]; o sea: f[0] = 1; f[1] = 1; ... f[7] = 0

2º Aplicamos la DFT al vector anterior y obtenemos otro vector de N elementos, que en general son números complejos:

F = [4.0 1.0 - 2.4j 0 1.0 - 0.4j 0 1.0 + 0.4j 0 1.0 + 2.4j]

3º Se obtienen los N/2 primeros coeficientes de la Serie de Fourier de f(t) a partir de los valores de F:

$$C_0 = F[0]/N;\quad C_1 = |F[1]|\cdot 2/N;\quad C_2 = |F[2]|\, 2/N;\ldots\quad C_{N/2} = |F[N/2]|\cdot 2/N$$

$$\theta_1 = -\angle F1];\quad \theta_2 = -\angle F[2];\ldots\quad \theta_{N/2} = -\angle F[N/2]$$

En el ejemplo que estamos calculando se obtienen los siguientes valores para los coeficientes de la serie de Fourier:

$$C_0 = 0,5;\quad C_1 = 0.65;\quad C_2 = 0;\quad C_3 = 0.27;\quad C_4 = 0$$

$$\theta_1 = 1,17;\quad \theta_2 = 0;\quad \theta_3 = 0,39;\quad \theta_4 = 0$$

4º Por último para calcular la repuesta a un sistema lineal se procede como se ha descrito con anterioridad.

La respuesta y(t) se puede poner como:

$$\begin{aligned} y(t) = C_0H(0) + C_1\left|H(\omega_0)\right|\cos\left(\omega_0 t - \theta_1 + \phi(\omega_0)\right) + \\ + C_2\left|H(2\omega_0)\right|\cos\left(2\omega_0 t - \theta_2 + \phi(2\omega_0)\right) + \\ + C_3\left|H(3\omega_0)\right|\cos\left(3\omega_0 t - \theta_3 + \phi(3\omega_0)\right) + \\ + C_4\left|H(4\omega_0)\right|\cos\left(4\omega_0 t - \theta_4 + \phi(4\omega_0)\right) \end{aligned}$$

donde:

$$H(n\omega_0) = \frac{1}{jn\omega_0 + 1} = \frac{1}{\sqrt{n^2\omega_0^2 + 1}}\angle \tan^{-1}(-n\omega_0)$$

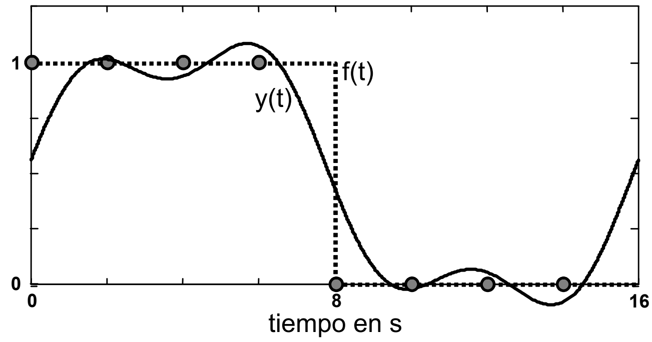
con $\omega_0 = \pi/8\,\text{rad/s}$. Entonces lo valores obtenidos son:

H(0) = 1,0;
$H(\pi/8) = 0,87 - 0,34j \Rightarrow |H(\pi/8)| = 0,93 \quad \phi(\pi/8) = -0,37$ rad
$H(2\cdot\pi/8) = 0,62 - 0,48j \Rightarrow |H(2\cdot\pi/8)| = 0,79 \quad \phi(2\cdot\pi/8) = -0,66$ rad
$H(3\cdot\pi/8) = 0,42 - 0,49j \Rightarrow |H(3\cdot\pi/8)| = 0,65 \quad \phi(3\cdot\pi/8) = -0,87$ rad
$H(4\cdot\pi/8) = 0,29 - 0,45j \Rightarrow |H(4\cdot\pi/8)| = 0,54 \quad \phi(4\cdot\pi/8) = -1,00$ rad

Con lo que la función temporal resultante es:

$$\begin{aligned} y(t) = 0,5 + 0,61\cos\left(\tfrac{\pi}{8}t - 1,17 - 0,37\right) + \\ + 0\cos\left(2\tfrac{\pi}{8}t - 0 - 0,66\right) + \\ + 0,17\cos\left(3\tfrac{\pi}{8}t - 0,39 - 0,87\right) + \\ + 0\cos\left(4\tfrac{\pi}{8}t - 0 + 1,00\right) \end{aligned}$$

A continuación se muestra una representación gráfica de los resultados obtenidos.



5º Otra forma de resolver el problema sería la de trabajar con las componentes de la DFT. La respuesta se obtendría como:

$$Y[k] = F[k]H(k\omega_0) \quad k = 0...N-1$$

Tenemos que conseguir que el vector Y[k] sea antisimétrico (conjugados) con respecto al punto medio. Para obtener la serie de puntos y[k] en el dominio temporal, bastaría con hacer la **IDFT** del vector Y[k]. Entonces la respuesta se puede poner como:

$$Y[0] = F[0]H(0)$$
$$Y[1] = F[1]H(\omega_0)$$
$$Y[2] = F[2]H(2\omega_0)$$
$$Y[3] = F[3]H(3\omega_0)$$
$$Y[4] = F[4]H(4\omega_0)$$
$$Y[5] = Y[3]^*;\ Y[6] = Y[2]^*;\ Y[7] = Y[1]^*$$

o sea:

H(0) = 1,0;
H(π/8) = 0,87 – 0,34j;
H(2·π/8) = 0,62 – 0,48j
H(3·π/8) = 0,42 – 0,49j
H(4·π/8) = 0,29 – 0,45j

Por lo que obtenemos los siguientes valores para el vector Y:

Y[0] = 4.00
Y[1] = 0.0450 - 2.4319j
Y[2] = 0
Y[3] = 0.2144 - 0.6668j
Y[4] = 0;
Y[5] = Y[3]* = 0.2144 + 0.6668j
Y[6] = Y[2]* = 0
Y[7] = Y[1]* = 0.0450 + 2.4319j

Ahora calculamos la IDFT con lo que se obtiene el siguiente vector y:

y[0] = 0.56
y[1] = 1.02
y[2] = 0.94
y[3] = 1.08

VIII.6.2 Ejemplo de utilización de la DFT a la resolución de un circuito eléctrico

Para ilustrar la resolución de regímenes transitorios de circuitos eléctricos mediante el empleo de la DFT, partimos del circuito de la Ilustración VIII-11.

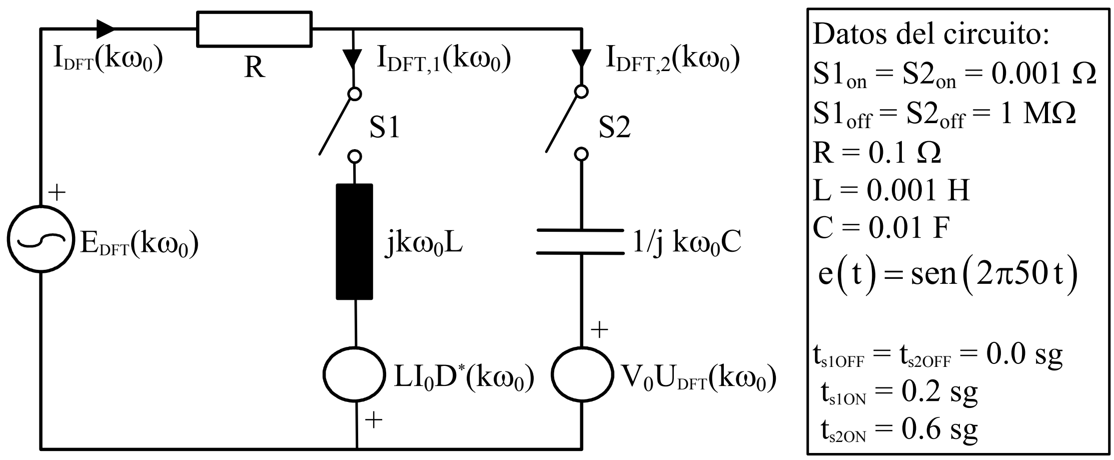


Ilustración VIII-11 *: Circuito con conmutación*

El objetivo es conocer la respuesta del circuito a una entrada sinusoidal durante la conexión sucesiva de los interruptores S1 y S2. El análisis se realizará por mallas, de ahí que las condiciones iniciales estén representadas por fuentes de tensión. Como la variación del estado de interruptores modifica el circuito, se repetirá el análisis con las condiciones específicas debidas al estado de los interruptores, que son:

1.- S1 OFF y S2 OFF con $t_0 = 0.0$ sg
2.- S1 ON y S2 OFF con $t_0 = 0.2$ sg
3.- S1 ON y S2 ON con $t_0 = 0.6$ sg

En cada uno de los análisis, las condiciones iniciales son los parámetros del circuito en el instante anterior. De esta forma los escalones unitarios empleados para las excitaciones y condiciones iniciales comienzan precisamente en los distintos t_0. Los impulsos unitarios que intervienen en cada análisis los obtenemos como derivada de los escalones anteriores.

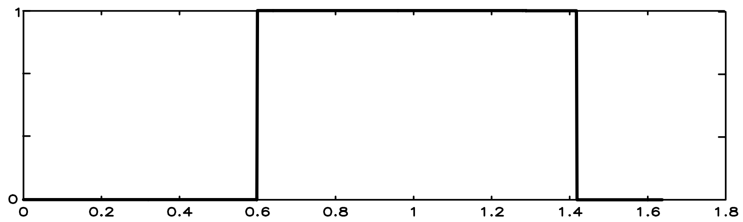
Las ecuaciones resultantes del análisis por mallas son:

$$[I]=[Y]\cdot[E] \qquad [I]=\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \qquad [E]=\begin{bmatrix} V-V_{C0} \\ V+V_{L0} \end{bmatrix} \tag{VIII.37}$$

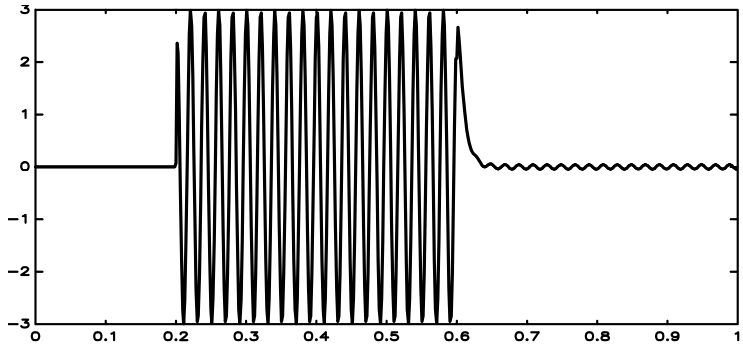
$$[Y]=[Z]^{-1}=\begin{bmatrix} R+R_{S1}+1/jk\omega_0 C & R \\ R & R+R_{S2}+jk\omega_0 L \end{bmatrix}^{-1} \tag{VIII.38}$$

donde:

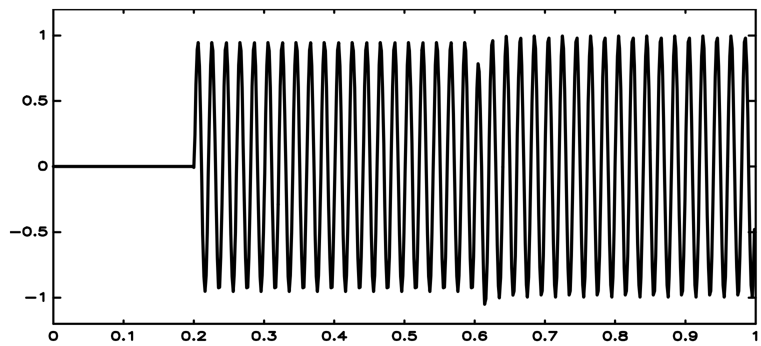
- Las funciones $F_{DFT}(k\omega_0)$ se denotan por F
- R_{s1} y R_{s2} son las resistencias de los interruptores S1 y S2 (dependen del estado del interruptor).
- $V_{C0}=V_{DFT,C0}(k\omega_0)=V_0 U_{DFT}(k\omega_0)$ es la fuente asociada a las condiciones iniciales del condensador
- $V_{L0}=V_{DFT,L0}(k\omega_0)=jk\omega_0 L I_0 U_{DFT}(k\omega_0)$ es la fuente asociada a las condiciones iniciales de la bobina



(a) Escalón unitario empleado para el instante t = 0.6 sg.



(b) Intensidad entregada por la fuente.



(c) Tensión en el condensador.

Ilustración VIII-12 *: Resultados del análisis mediante la DFT*

Para la resolución de este circuito se ha empleado un programa en MATLAB cuyo listado se muestra en las siguientes páginas.

VIII.6.2.1 Listado del Matlab para la resolución del circuito

```
%% ******************************************************************* %
%% ******************************************************************* %
%%                                                                      %
%%  Prueba de empleo de la DFT para su utilización en sistema lineales. %
%%  Respuesta de un circuito RLC a un escalón.                          %
%%                                                                      %
%%  Entrada: Escalón de tensión (u(t)).                                 %
%%  Salida : Intensidad (ir(t))                                         %
%%                                                                      %
%% ******************************************************************* %
%% ******************************************************************* %
%
%  Empleo de la transformada de Fourier para el estudio de circuitos no
% lineales. Para ello lo que hacemos es estudiar la respuesta del circuito
% en todo el tiempo de definición del problema, para cada uno de los circuitos
% derivados de la variación de las condiciones de funcionamiento (apertura
% de un interruptor, ...) teniendo en cuenta las condiciones iniciales
% procedentes del estado anterior. O sea, tenemos un circuito diferente
% cada vez que, por ejemplo, un interruptor varía su estado.
%  Estudiamos el circuito en todo el tiempo con el interruptor en
% el estado inicial, y volvemos  a realizar el estudio con el interruptor
% en el estado final teniendo en cuenta las condiciones iniciales de los
% condensadores y bobinas, y siendo la entrada un escalón a partir
% del instante en el cambió el estado del interruptor.
%
% INCONVENIENTES:
% - Paso constante. Sería interesante poder variar el paso temporal en
% aquellos lugares donde hay discontinuidades.
% - El estudio hay que realizarlo en cada de una de las etapas para todo
% el intervalo de tiempo donde está definido el problema.
% - En el caso estudiado las modificaciones del circuito están controladas
% desde el exterior, no se contempla la inclusión de elementos cuyo
% funcionamiento dependa del estado del circuito (diodos, ...)
%
% NOTA:
%  Hay que tener en cuenta que al trabajar con la DFT todas las se¤ales
% tienen que ser periódicas, ya que así lo considera la DFT. De ahí que
% los escalones sean ondas cuadradas, cuyo ciclo de trabajo es del 50%, para
% aproximarnos más a la Transformada de Fourier del escalón real.
%
%

%Parámetros del circuito.
E=1;uo=0;io=0;
B=0;
Ro=0.1;
C1=0.01;
L1=0.001;
Roff=1e6;
Ron =1e-3;
fo=50.0;wo=2*pi*fo;

%Parámetros de cálculo.
%Nel=2^15;
Nel=2^11;
m=1; M=Nel;
n=1; N=Nel/12;
tfinal=1.6;

%Correción del período de Muestreo.
% Hacemos esto para que el periodo de muestreo y el tiempo final
% están relacionados con el númuero de muestras.
T=tfinal/(Nel-1);
NmC=floor(1/(fo*T));
T=1/(NmC*fo);
tfinal=T*(Nel-1);

%Ejes
t=([0:Nel-1]'/(Nel-1))*tfinal;
w=2*pi*[0:Nel-1]'/tfinal;
[fw,cw]=size(w);

%Constantes
I=ones(fw,cw); %Matriz unidad
j=sqrt(-1); %Numero complejo puro
```

```
% Definición de la funciones escalon en el origen.
e0=(sin((t+T)*2*pi/max(t))>0); %Función escalón
E0=fft(e0);

% Definimos la función impulso en el origen.
D0=j*w.*E0;
D0=tf2dft(D0);

%**** Definición de la entrada ****

%Impedancia del condensador.
Cw=I./(j*C1*w);Cw(1)=-1e12*j;
Cw=tf2dft(Cw);

%Condiciones variables de funcionamiento.
Mtcon=[0.01 0.2  0.6]; %Instantes de conmutación
MRs1 =[Roff Ron  Ron]; %Estado del interruptor 1
MRs2 =[Roff Roff Ron]; %Estado del interruptor 2
if1=zeros(fw,cw);if2=zeros(fw,cw);
ucf=zeros(fw,cw);


%*************** BUCLE DE ITERACIONES ***********************
for l=1:3
l
tcon=Mtcon(l);
if l<3
 tfin=Mtcon(l+1);
else
 tfin=tfinal;
end;

Rs1=MRs1(l);
Rs2=MRs2(l);

% Corrección de los tiempos, para que los instantes de conexión de
%los interruptores pertenezcan al vector de tiempos (t) empleado.
[v,vi]=min(abs(t-tcon));
[v,vii]=min(abs(t-tfin));
tcon=t(vi);
tfin=t(vii);

%**** Definición de la funciones escalon e impulso.
% Para cada instante recalculamos la función escalón. Podríamos
% aplicar la propiedad del despazamiento temporal, pero esto introduce
% errores (Fenómeno de Gibbs).
esc=(sin((t-t(vi-1))*2*pi/max(t))>0); %Función escalón
Esc=fft(esc);

%plot(t,esc),grid

% Definimos la función impulso como la derivada de la función escalón.
D=j*w.*Esc;
D(Nel:-1:Nel/2+2)=conj(D(2:Nel/2)); %Garantizamos la simetría de la DFT
D(Nel/2)=0;

%**** Definición de la condiciones iniciales.
Ulo=L1*io*D; %Bobina. Impulso de tensión.
Uco=uo*Esc;  %Condensador. Escalón de tensión.

%**** Tensión de la fuente.
% Escalón aplicado en cada uno los instantes de conmutación.
u=E*sin(wo*(t-tcon)+B).*esc; %Función seno
U=fft(u);

%**** Obtención de la función de transferencia. (IMPEDANCIA COMPLEJA)
Y11=zeros(fw,cw);Y12=zeros(fw,cw);Y21=zeros(fw,cw);Y22=zeros(fw,cw);
for k=1:Nel
 wk=w(k);
 if wk==0
  wk=1e-8;
 end;
 Z = [ Ro+Rs1+1/(j*wk*C1) Ro;
       Ro                 Ro+Rs2+j*wk*L1];

 Y=inv(Z);
 Y11(k)=Y(1,1);
 Y12(k)=Y(1,2);
 Y21(k)=Y(2,1);
 Y22(k)=Y(2,2);
end;
```

```
% Matriz de admitancias del circuito.
Y11=tf2dft(Y11);
Y12=tf2dft(Y12);
Y21=tf2dft(Y21);
Y22=tf2dft(Y22);

%***** Obtención de la respuesta. INTENSIDAD => [I]=[Y]*[E]
I1 = Y11.*(U-Uco)+Y12.*(U+Ulo);I1=tf2dft(I1);
I2 = Y21.*(U-Uco)+Y22.*(U+Ulo);I2=tf2dft(I2);

i1=real(ifft(I1));
i2=real(ifft(I2));

%Tensión en el condensador.
%Esto para solucionar el problema de la indeterminación.
i1t=i1.*t;
I1t=-1*fft(i1t);

Uc=I1.*Cw;
Uc(1)=I1t(1)/C1;
Uc=Uc+Uco;
Uc=tf2dft(Uc);
uc=real(ifft(Uc));

%  Actualización de las condiciones iniciales. Preparamos el circuito
% ya que, en el instante siguiente alguna de los interruptores va a
% cambiar de estado.
if l<3
 uo=uc(vii);
 io=i2(vii);
end;

%Actualización de las intensidades
tcon,tfin
%plot(t,[if2,i1]),grid,pause
if1(vi:vii)=i1(vi:vii); % Intensidad en el condensador.
if2(vi:vii)=i2(vi:vii); % Intensidad en la bobina.
ucf(vi:vii)=uc(vi:vii); % Tensión en el condensador.

end; %Final del bucle FOR

ifo=if1+if2; %Intensidad suministrada por la fuente.

disp('');
disp('  Ejemplo de empleo de la DFT en el analisis de sistema lineales.');
disp('');
```

IX. La Transformada de Fourier en Tiempo Discreto (DTFT)

Hasta ahora las funciones con las que se han trabajado son funciones continuas en el tiempo, y aunque puede ser que la mayor parte del tiempo valgan cero, se puede conocer su valor en cualquier instante. En cambio, hay otro tipo de señales que para cualquier intervalo de tiempo[1] finito toman un número finito de valores, son las llamadas señales o secuencias discretas. Se pueden encontrar fácilmente en los campos que abarca la ingeniería ejemplos de ambas. Por ejemplo, una señal continua es la tensión de descarga de un condensador a lo largo del tiempo. Quizás sea este tipo de señales, las continuas, con las que se está más habituado a trabajar. No obstante, existen fenómenos cuya naturaleza requiere un tratamiento discreto, como puede ser la representación de una curva diaria de consumo.

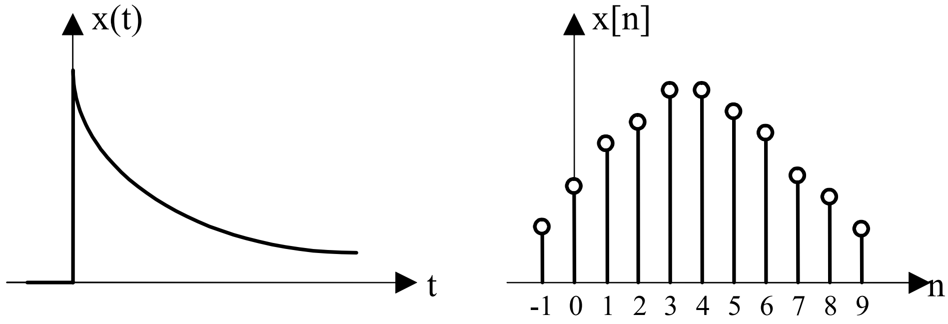


Ilustración IX-1: Ejemplo de función continua f(t) y discreta f[n]

Las funciones en tiempo discreto se denotan como f[n], donde n es el índice de la secuencia, y, por consiguiente, un número natural. Para resaltar el hecho de que están sólo definidas para valores enteros de n también se les llama *secuencias discretas* o *en tiempo discreto*.

Una señal en tiempo discreto puede provenir de una señal continua, por ejemplo, a través del muestreo. Esta es una forma habitual para obtener un número finito de valores significativos en un determinado intervalo de tiempo a partir de una función continua en el tiempo. Resulta fácil caer en la tentación de identificar la idea de señal discreta con la de señal continua muestreada. Sin embargo se ha de evitar tal error, ya que la teoría de señales discretas es mucho más amplia, abarcando desde fenómenos sólo representables en el dominio discreto hasta los ya mencionados procesos de muestreado. Es por ello que se han desarrollado a lo largo de los años teorías de análisis de señales en tiempo discreto que pueden transcurrir de forma paralela o análoga a los métodos de análisis en el dominio continuo del tiempo. Consecuentemente existen múltiples similitudes entre ambos tipos de señales y métodos de análisis, no obstante, las diferencias son igual de evidentes e importantes. Es en este marco donde se va a presentar la Transformada de Fourier en Tiempo Discreto (DTFT[2]) que, como su nombre apunta, busca extraer información de tipo frecuencial de las secuencias discretas, y aunque se pueden encontrar similitudes de comportamiento con la Transformada de Fourier o incluso la DFT, también se hará notar el distanciamiento con ellas.

[1] En este caso el estudio se centra en señales temporales, aunque los resultados son generalizables a otro tipo de variables.
[2] Siglas de "Discrete Time Fourier Transform"

IX.1 Señales básicas en tiempo discreto

Las dos primeras señales en las que es fácil pensar cuando se habla de señales básicas en el análisis mediante la Transformada de Fourier son la función escalón y la función impulso. Estas funciones tienen su contrapartida discreta, estando definidas de la siguiente manera:

$$u[n]=\begin{cases}0, & n<0\\ 1, & n\geq 0\end{cases}$$ Escalón unitario en tiempo discreto. (IX.1)

$$\delta[n]=\begin{cases}0, & n\neq 0\\ 1, & n=0\end{cases}$$ Función impulso unitario en tiempo discreto (IX.2)

Estas funciones guardan ciertas analogías con sus "colegas" continuas, tal y como se puede comprobar las recogidas en la Tabla IX-1. También son importantes las diferencias, por ejemplo desaparecen las discontinuidades como tales, y aunque sigue habiendo "saltos", estos ya no representan una indefinición de la función.

Tabla IX-1: Propiedades del escalón e impulso.

Dominio Discreto	Dominio Continuo
$f[n]\delta[n]=f[0]\delta[n]$	$f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)$
$u[n]-u[n-1]=\delta[n]$	$du(t)/dt=\delta(t)$
$u[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}\delta[k]$	$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(t)dt$.

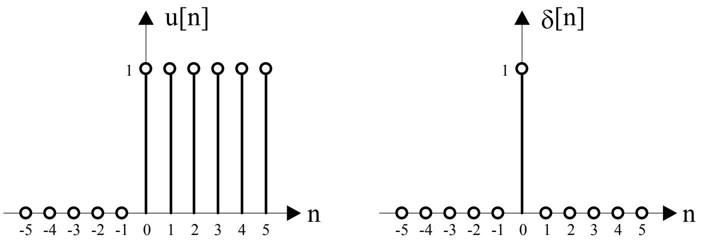


Ilustración IX-2: Funciones Escalón e Impulso Unitario

Otra función de suma importancia en el análisis de Fourier es la exponencial compleja, y con ella las funciones seno y coseno, ya que el comportamiento de estas dos funciones es idéntico al de la primera. Su expresión es:

$$f[n]=e^{j\Omega_0 n} \qquad \text{(IX.3)}$$

Esta expresión recuerda a aquella que corresponde a la de la exponencial compleja en el dominio del tiempo, cuya expresión es: $f(t)=e^{j\omega_0 t}$

Aunque sus expresiones formales son muy similares, existen diferencias muy importantes entre ambas. Para poner de manifiesto estas diferencias, se parte de dos propiedades que caracterizan a la exponencial compleja en el dominio continuo del tiempo:

- A mayor valor de ω_0 mayor será la frecuencia y menor será el período de oscilación de la funciónf(t)
- La exponencial compleja es periódica para cualquier valor de ω_0

A su vez, la exponencial compleja en su versión discreta tiene una importante propiedad, que se puede resumir en la igualdad:

$$e^{j(\Omega_0+2\pi)n}=e^{j\Omega_0 n} \qquad \text{(IX.4)}$$

Esto significa que la elección de un exponente en el que se incluya a cualquiera de los siguientes términos: Ω_0 , $\Omega_0\pm2\pi$, $\Omega_0\pm4\pi$, … da lugar a secuencias idénticas. Así que para estudiar el

comportamiento de la exponencial compleja sólo es necesario estudiar los valores de Ω_0 en cualquier intervalo de ancho 2π (p. ej. de 0 a 2π ó de $-\pi$ a $+\pi$), y el comportamiento para el resto del rango de valores, $\Omega_0 \in (-\infty,+\infty)$, es idéntico a lo comentado para el intervalo de ancho 2π.

Una consecuencia importante de esta propiedad es que la frecuencia de oscilación de la exponencial compleja discreta no aumenta a medida que lo hace Ω_0. Por ejemplo, cuando se alcanza el valor $\Omega_0 = 2\pi$ la exponencial tienen un comportamiento idéntico a cuando $\Omega_0 = 0$, que es una secuencia de frecuencia nula ya que:

$$f[n] = e^{j\Omega_0 n}\Big|_{\Omega_0=0} = 1 \qquad \text{(IX.5)}$$

Por lo tanto las bajas frecuencias están asociadas a valores de Ω_0 cercanos a 0, $\pm 2\pi$, $\pm 4\pi$, $\pm 6\pi$, … Por otra parte las altas frecuencia se alcanzan cuando los valores de Ω_0 rondan las cercanías de $\pm\pi$, $\pm 3\pi$, $\pm 5\pi$, … Ya que cuando $\Omega_0 = \pi$ la secuencia que se obtiene es la de mayor frecuencia posible, el período es 2 (ha de ser un número entero), o sea:

$$f[n] = (-1)^n \qquad \text{(IX.6)}$$

Como resumen, se puede afirmar que en el espectro de frecuencia discreta las *bajas frecuencias se sitúan alrededor de los múltiplos pares de* π, mientras que *la altas frecuencia se localizan en las cercanías de los múltiplos impares de* π.

En este punto ya se ha comprobado que la exponencial compleja discreta *no cumple* la primera propiedad de las dos enumeradas para la exponencial compleja continua. Ahora le toca el turno a la segunda propiedad que tendrá idéntico tratamiento que la primera.

Para que una secuencia f[n] sea periódica, ha de existir un número entero N llamado período que haga que para cualquier valor n se cumpla que f[n+N]=f[n]. Esto mismo aplicado a la exponencial compleja implica que para que una exponencial compleja discreta sea periódica de período N se ha de cumplir que:

$$e^{j\Omega_0(n+N)} = e^{j\Omega_0 n} \quad \Leftrightarrow \quad e^{j\Omega_0 N} = 1 \qquad \text{(IX.7)}$$

Esto significa que:

$$\Omega_0 N = 2\pi m \Leftrightarrow \frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N} \qquad \text{(IX.8)}$$

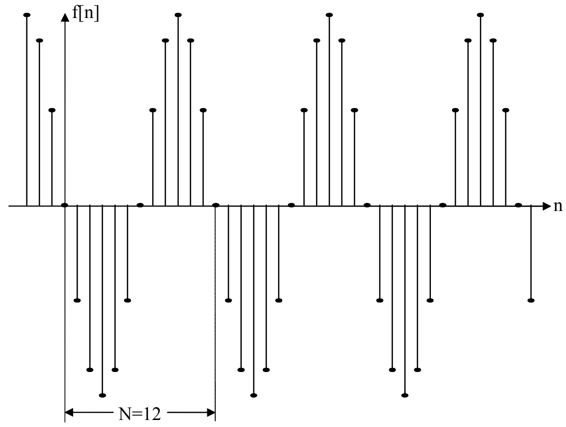
donde m es un número entero, N el período de la función y Ω_0/m su frecuencia.

Todas la conclusiones alcanzadas para la función exponencial compleja quedan resumidas en la Tabla IX-2. Algunos ejemplos de señales sinusoidales se muestran es la Ilustración IX-3. El comportamiento de las señales sinusoidales es el mismo que el de las exponenciales complejas.

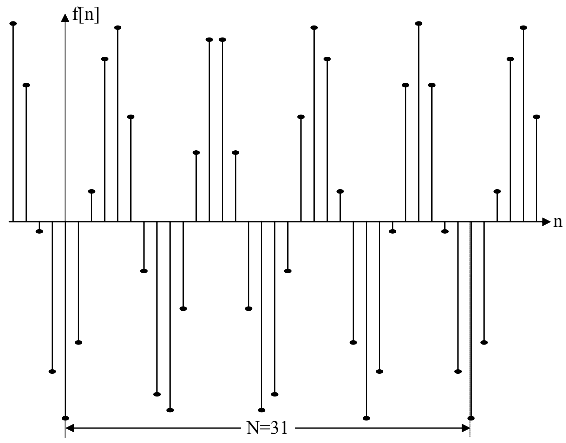
Tabla IX-2: Propiedades de la exponencial compleja

$e^{j\omega_0 t}$	$e^{j\Omega_0 n}$
Señales distintas para distintos valores de ω_0	*Señales idénticas para exponenciales separadas* 2π
Periódica para cualquier valor de ω_0	*Periódica sólo si:* $\Omega_0 = \frac{2\pi m}{N}$ *con N > 0*
Frecuencia fundamental: ω_0	*Frecuencia fundamental:* Ω_0/m
Período $\omega_0 = 0$ *: indefinido* $\omega_0 \neq 0$ *:* $\frac{2\pi}{\omega_0}$	*Período* $\Omega_0 = 0$ *: indefinido* $\Omega_0 \neq 0$ *:* $m\left(\frac{2\pi}{\Omega_0}\right)$

$$f[n]=\cos\left(\frac{2\pi}{12}n\right) \Rightarrow \text{Secuencia periódica con N=12}$$



$$f[n]=\cos\left(\frac{8\pi}{31}n\right) \Rightarrow \text{Secuencia periódica. con N = 31}$$



$$f[n]=\cos\left(\frac{1}{6}n\right) \Rightarrow \text{Secuencia No periódica}$$

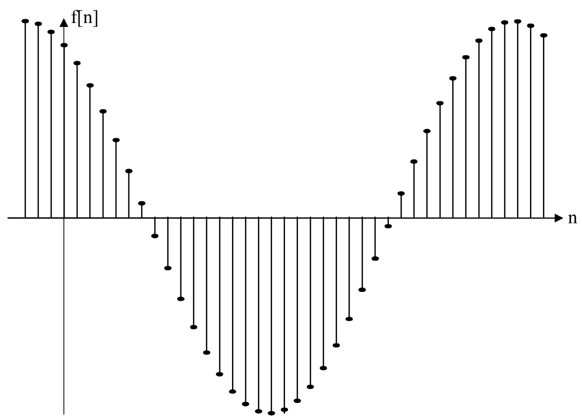


Ilustración IX-3: Ejemplo de secuencias sinusoidales

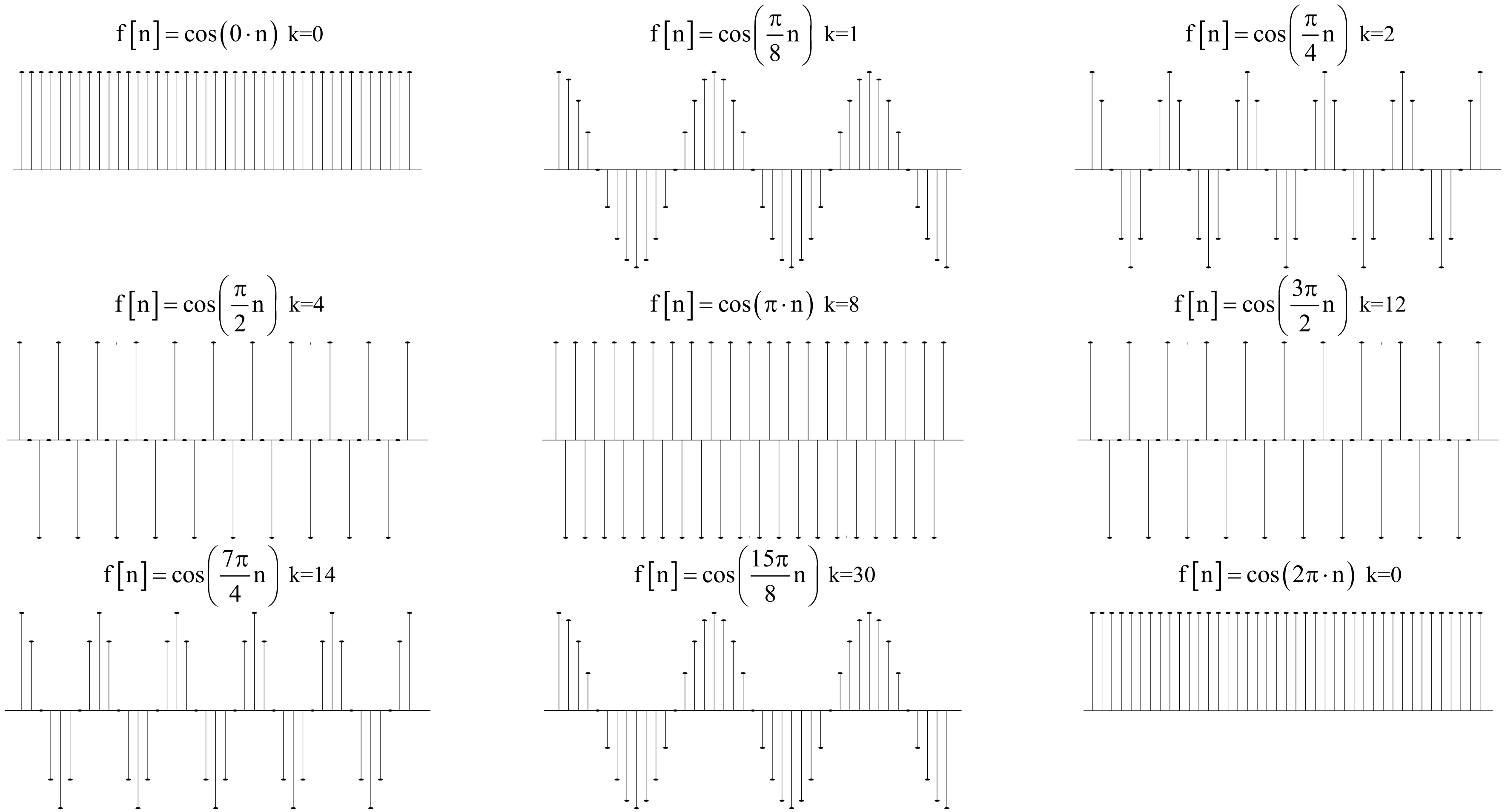


Ilustración IX-4: Periodicidad de las señales sinusoidales periódicas discretas (Parte real de $e^{jk(2\pi/N)n}$) con N = 16

IX.2 Representación de señales periódicas

Una secuencia es periódica si existe algún número entero positivo que haga que se cumpla que:

$$f[n+N]=f[n] \quad \text{(IX.9)}$$

Al menor número entero N que haga que se cumpla la anterior relación se le llama período. Por ejemplo, se ha visto la exponencial compleja de período N definida por:

$$f[n]=e^{j\frac{2\pi m}{N}n} \quad \text{(IX.10)}$$

Se puede encontrar una descomposición de una señal periódica cualquiera en suma de exponenciales complejas de idéntico período de la siguiente manera:

$$f[n]=\sum_{k=<N>} d_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \quad \text{(IX.11)}$$

Esta es la llamada descomposición se Serie de Fourier en Tiempo Discreto (DTFS[3]) de la Secuencia Periódica f[n], donde a cada una de la exponenciales complejas se les denomina Secuencias Armónicas de f[n] (ver Ilustración IX-6). Los términos d_k son los coeficientes de la DTFS y se calculan mediante la expresión:

$$d_k=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>} f[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \quad \text{(IX.12)}$$

De la misma manera en que la secuencia de la que se calculan los coeficientes de la DTFS cumple que f[n+N]=f[n] por ser periódica, se puede demostrar fácilmente que los coeficientes de la DTFS son a su vez periódicos ya que $d_{k+N} = d_k$. Esto de debe a que la exponencial compleja también es periódica y cumple que:

$$e^{-j(k+N)\frac{2\pi}{N}n}=e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \quad \text{(IX.13)}$$

Es por esto que, para calcular los coeficientes d_k se emplea un sumatorio extendido a los N puntos representativos de un período cualquiera. Y estos coeficientes son a su vez periódicos con periodicidad N, por los tanto, para la descomposición de f[n] sólo se necesitan N coeficientes consecutivos (ver Ilustración IX-5).

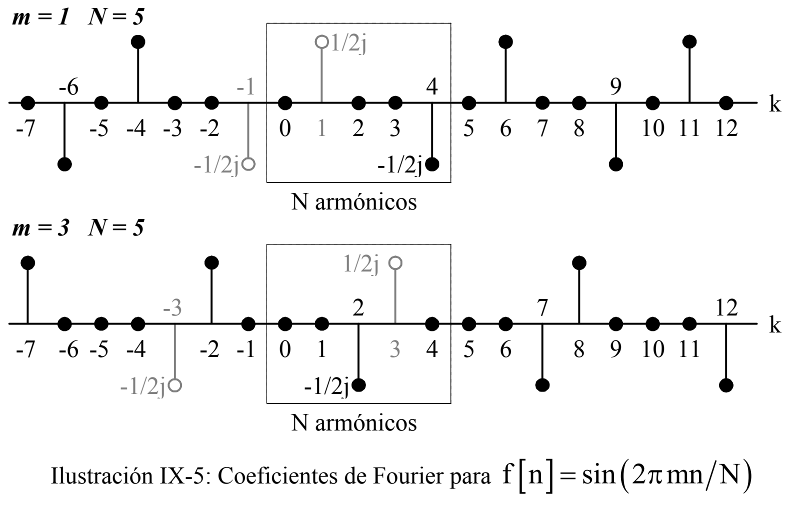


Ilustración IX-5: Coeficientes de Fourier para $f[n]=\sin(2\pi mn/N)$

[3] Siglas de “Discrte Time Fourier Series”

Cuando se trató la convergencia de las series de Fourier en el dominio continuo del tiempo se presentaban algunas dificultades como el fenómeno de Gibbs. En cambio con secuencias discretas este problema desaparece ya que los sumatorios involucrados en la obtención de la serie de Fourier son finitos, como tampoco tiene sentido estudiar la convergencia en las discontinuidades ya que éstas no aparecen en los sistemas discretos. Cabe decir, por lo tanto, que la convergencia de la DTFS es todavía mejor que la de su "versión" para el dominio continuo del tiempo.

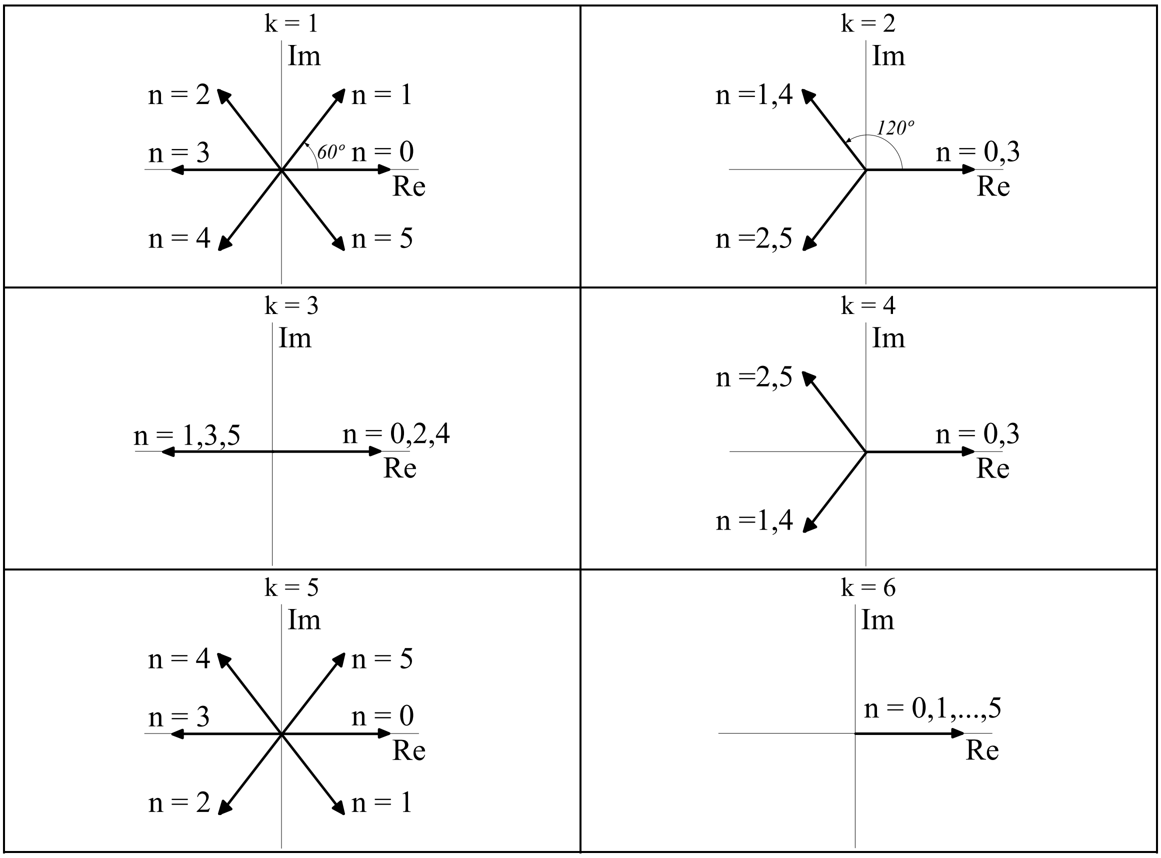


Ilustración IX-6: Secuencias armónicas $e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$ para N = 6

IX.3 La Transformada de Fourier en Tiempo Discreto

Al igual que ocurría en el caso continuo se puede llegar la Transformada de Fourier en Tiempo Discreto (DTFT) como un caso límite de la DTFS. O bien, definir la Transformada y llegar a la serie como un caso particular de la primera. En todo caso el proceso es análogo al ya visto para el caso continuo en el tiempo y, por lo tanto, aquí se introduce directamente su definición que es:

$$F(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f[n]e^{-j\Omega n} \quad \text{Transformada de Fourier en Tiempo Discreto}$$

$$f[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} F(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega \quad \text{Transformada Inversa de Fourier en Tiempo Discreto} \tag{IX.14}$$

donde $\int_{2\pi}$ representa la integral extendida a 2π, por ejemplo, entre $-\pi$ y π.

Al igual que en el caso continuo, es como si se hiciese una descomposición de una señal, en este caso una secuencia discreta, en armónicos que están separados un infinitésimo. Resulta

paradójico que partiendo de la secuencia discreta f[n] se llegue a un espectro continuo en el dominio de la frecuencia F(Ω). Sin embargo el espectro obtenido tiene una peculiaridad importante, que es periódico. Esto se debe a la ya mencionada periodicidad de frecuencia de la exponencial compleja, o sea que:

$$F(\Omega + 2\pi) = F(\Omega) \qquad \text{(IX.15)}$$

Esto quiere decir que las altas frecuencias se sitúan en torno a los múltiplos impares de π (±π, ±3π, ±5π…) y las bajas en torno a los múltiplos pares (0, ±2π, ±4π, ±6π…), tal y como se puede ver en la Ilustración IX-7.

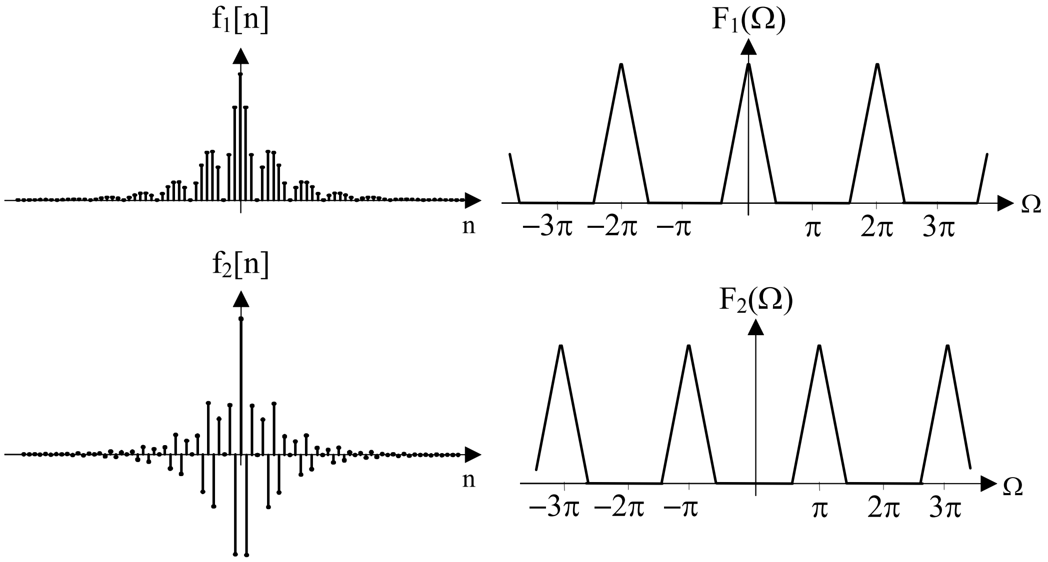


Ilustración IX-7: Comportamiento de la Transformada de Fourier Discreta

IX.4 La Transformada de Fourier en Tiempo Discreto y la Serie de Fourier en Tiempo Discreto

Si se tiene la secuencia periódica f[n] de período N (f[n+N]=f[n]) se puede, a partir de un período cualquiera, definir una secuencia aperiódica $f_a[n]$ que abarque un solo ciclo de la anterior. Su expresión formal para un número entero M cualquiera es:

$$f_a[n] = \begin{cases} f[n] & M \le n \le M+N \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \qquad \text{(IX.16)}$$

Entonces, los coeficientes de la DTFS se pueden obtener como:

$$\left.\begin{array}{r} f_a[n] \xrightarrow{\text{TFD}} F_a(\Omega) \\ f[n] \xrightarrow{\text{SFD}} d_k \end{array}\right\} \Rightarrow Nd_k = F_a(\Omega)\Big|_{\Omega = k\frac{2\pi}{N}} \qquad \text{(IX.17)}$$

O sea, que los coeficientes d_k de la DTFS de f[n] se pueden obtener como muestras de la DTFT F(Ω) para las frecuencia Ω=2πk/N.

De todas formas si se calcula la DTFT de la secuencia periódica f[n] se obtiene un tren de impulsos en el dominio de la frecuencia cuya expresión es:

$$f[n] \xrightarrow{\text{TFD}} F(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi d_k \delta(\Omega - 2\pi k/N) \qquad \text{(IX.18)}$$

En donde cada uno de los impulsos está definido en las frecuencias correspondientes a los distintos armónicos de la DTFS.

IX.5 Propiedades de la Transformada de Fourier en Tiempo Discreto

A continuación se presentarán las propiedades más importantes de la Transformada de Fourier en Tiempo Discreto. Por notación, la operación de Transformación de Fourier Discreta se simboliza como DTFT y la del cálculo de los coeficientes de la Serie de Fourier Discreta se toma como DTFS.

IX.5.1 Periodicidad

La transformada de Fourier Discreta es periódica de período 2π. Esto significa que las componentes de baja frecuencia están en torno a los múltiplos pares de π y las de alta frecuencia en torno a los múltiplos impares de π.

IX.5.2 Linealidad

La transformada de la combinación lineal de dos secuencias es la combinación lineal de sus transformadas, o sea:

$$\left.\begin{array}{l} f_1[n] \xrightarrow{\text{DTFT}} F_1(\Omega) \\ f_2[n] \xrightarrow{\text{DTFT}} F_2(\Omega) \end{array}\right\} \Rightarrow a\,f_1[n] + b\,f_2[n] \xrightarrow{\text{DTFT}} aF_1(\Omega) + bF_2(\Omega) \qquad \text{(IX.19)}$$

IX.5.3 Simetría

Si una secuencia f[n] es real, como ocurre con todas la relacionadas con procesos físicos, se cumplen una serie de propiedades de simetría para la transformada, que son:

$$\text{Si } f[n] \text{ es real} \Leftrightarrow \begin{cases} F(\Omega) = F^*(-\Omega) \\ \text{Re}\{F(\Omega)\} \text{ es par e } \text{Im}\{F(\Omega)\} \text{ es impar} \\ |F(\Omega)| \text{ es par y } \angle F(\Omega) \text{ es impar} \end{cases} \qquad \text{(IX.20)}$$

IX.5.4 Desplazamiento temporal y escalado en frecuencia

La propiedad del desplazamiento temporal se puede enunciar diciendo que el desplazar una secuencia sólo afecta a la fase de su transformada, por lo tanto:

$$f[n-n_0] \xrightarrow{\text{DTFT}} F(\Omega)e^{-j\Omega n_0} \qquad \text{(IX.21)}$$

Existe la propiedad dual de la anterior llamada del desplazamiento frecuencial y se puede enunciar como:

$$f[n]e^{jn\Omega_0} \xrightarrow{\text{DTFT}} F(\Omega-\Omega_0) \qquad \text{(IX.22)}$$

IX.5.5 Diferenciación e Integración

La operación equivalente a la diferenciación en el dominio discreto es la del cálculo de incrementos, según esto se puede enunciar la propiedad de diferenciación como:

$$f[n]-f[n-1] \xrightarrow{\text{DTFT}} \left(1-e^{-j\Omega}\right)F(\Omega) \qquad \text{(IX.23)}$$

De la misma forma la integración es aquí un sumatorio y, por lo tanto, la propiedad de integración queda enunciada de la siguiente manera:

$$g[n]=\sum_{m=-\infty}^{n} f[m] \xrightarrow{\text{DTFT}} G(\Omega)=\frac{1}{1-e^{-j\Omega}}F(\Omega)+\pi F(0)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\Omega-2\pi k) \qquad \text{(IX.24)}$$

En cambio, sí existe la diferenciación en el dominio de la frecuencia y, además, una propiedad asociada a ella enunciada como:

$$n\cdot f[n] \xrightarrow{\text{DTFT}} j\frac{dF(\Omega)}{d\Omega} \qquad \text{(IX.25)}$$

IX.5.6 Convolución

En cuanto a la convolución tenemos dos casos. El primero sería la *convolución circular* que se aplica a señales periódica de igual período N. En este caso el sumatorio que involucra a la convolución está limitado a los N valores que representan un período cualquiera. De esta forma:

$$\left.\begin{matrix} f_1[n] \xrightarrow{\text{SFD}} d_{k,1} \\ f_2[n] \xrightarrow{\text{SFD}} d_{k,2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow f_1[n]\otimes f_2[n]=\sum_{m=\langle N\rangle} f_1[m]f_2[n-m] \xrightarrow{\text{DTFS}} d_{k,1}d_{k,2} \qquad \text{(IX.26)}$$

El segundo caso sería el de la *convolución para secuencias no periódicas* en general, en este caso la propiedad de convolución tiene la expresión:

$$\left.\begin{matrix} f_1[n] \xrightarrow{\text{DTFT}} F_1(\Omega) \\ f_2[n] \xrightarrow{\text{DTFT}} F_2(\Omega) \end{matrix}\right\} \Rightarrow f_1[n]*f_2[n]=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_1[m]f_2[n-m] \xrightarrow{\text{DTFT}} F_1(\Omega)F_2(\Omega) \qquad \text{(IX.27)}$$

Por otra parte la *propiedad de modulación* tiene una única expresión en la que está implicada la convolución periódica de la DTFT, ésta es:

$$\left.\begin{matrix} f_1[n] \xrightarrow{\text{TFD}} F_1(\Omega) \\ f_2[n] \xrightarrow{\text{TFD}} F_2(\Omega) \end{matrix}\right\} \Rightarrow f_1[n]\cdot f_2[n] \xrightarrow{\text{DTFT}} F_1(\Omega)\otimes F_2(\Omega)=\int_{2\pi} F_1(W)F_2(\Omega-W)dW \qquad \text{(IX.28)}$$

IX.5.7 Teorema de Parseval

Este teorema relaciona el contenido en energía de una secuencia con su espectro de frecuencia mediante la expresión:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|f[n]|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}|F(\Omega)|^2 d\Omega \qquad \text{(IX.29)}$$

donde F(Ω) es la DTFT de f[n]. El primer término representa el contenido en energía de la secuencia f[n], calculado a partir de $|F(\Omega)|^2$ de ahí que a esta función se le denomine *espectro de energía* de f[n].

Si la señal es periódica es más propio hablar de contenido de energía por período o potencia, de esta forma la expresión de Parseval es:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle}|f[n]|^2=\sum_{k=\langle N\rangle}|d_k|^2 \qquad \text{(IX.30)}$$

donde N es el período de f[n] y los términos d_k los coeficientes de su DTFS.

IX.5.8 Dualidad

En la tabla siguiente se muestran las distintas relaciones de dualidad mediante flechas.

Tabla IX-3: Espresiones de las Series y Transformadas y relaciones de dualidad

	Dominio continuo del tiempo		Dominio Discreto del tiempo	
	Dominio del tiempo	Dominio de la frecuencia	Dominio del tiempo	Dominio de la frecuencia
Series de Fourier	$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$ Continua Periódica	$a_k=\frac{1}{T_0}\int_{T_0} f(t)e^{-j\omega t}dt$ Discreta Aperiódica	$f[n]=\sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$ Discreta Periódica	$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} f[n]e^{-jk(2\pi/N)n}$ Discreta Periódica
Transformadas de Fourier	$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$ Continua Aperiódica	$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$ Continua Aperiódica	$f[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} F(\Omega)e^{j\Omega n}$ Discreta Aperiódica	$F(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f[n]e^{-j\Omega n}$ Continua Periódica

Relaciones de Dualidad

Continuo f(t) ⇔ F(ω) *Continuo*

$$\begin{cases} f(t)\overset{\Im}{\longleftrightarrow}F(\omega) \\ F(t)\overset{\Im}{\longleftrightarrow}\frac{1}{2\pi}f(-\omega) \end{cases}$$

Continuo a_k ⇔ f[n] *Discreto*

$$\begin{cases} f[n]\overset{\Im}{\longleftrightarrow}F(\Omega) & \text{Discreto} \\ F(t)\overset{\Im}{\longleftrightarrow}a_k=f(-k) & \text{Continuo} \end{cases}$$

Discreto f[n] ⇔ a_k *Discreto*

$$\begin{cases} f[n]\overset{\Im}{\longleftrightarrow}a_k=g[k] \\ g[n]\overset{\Im}{\longleftrightarrow}\frac{1}{N}f[-k] \end{cases}$$

IX.6 Relación entre la DFT y la DTFT

Si se observan las expresiones para la obtención de la DFT y de la DTFT, se puede ver que son hasta cierto punto comparables:

$$\text{DFT} \rightarrow F_{DFT}\left(k\omega_0\right) = F_{DFT}\left(k\frac{2\pi}{NT}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} f\left(nT\right)e^{-j2\pi kn/N} \tag{IX.31}$$

$$\text{DTFT} \rightarrow F\left(\Omega\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f\left[n\right]e^{-j\Omega n} \tag{IX.32}$$

No obstante, sus diferencias son notables, como el número de elementos del sumatorio, y el hecho de que la DFT es una función discreta y la DTFT es continua en el dominio de la frecuencia.

Para estudiar la relación entre ambas, se va analizar la transformada de una señal de tiempo discreto de duración finita, esto es: $f[n] = 0$ para $n<0$ y $n\geq N$. Esta señal se supone procedente de una señal continua $f(t)$, de forma que sus muestras coinciden con los valores de la secuencia discreta, es decir: $f(nT) = f[n]$. Si se calcula la DTFT de la señal recién descrita, se obtiene el sumatorio:

$$F\left(\Omega\right) = \sum_{n=0}^{N-1} f\left[n\right]e^{-j\Omega n} \tag{IX.33}$$

Si a su vez, la DTFT obtenida se muestrea en el dominio de la frecuencia, se obtiene la equivalencia buscada:

$$F_{DFT}\left(k\frac{2\pi}{NT}\right) = F\left(\Omega\right)\Big|_{\Omega=2\pi k/NT} \tag{IX.34}$$

Este resultado invita a interpretar a la DFT como la versión muestreada en el dominio de la frecuencia de la DTFT. La equivalencia entre ambas está entonces afectada por todos los efectos relativos al muestreo mencionados en los capítulos IV y V.

X. Propiedades y Transformadas de Fourier más habituales

X.1 Diferentes formas de la Serie de Fourier

$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t\right]$	$a_n=\frac{2}{T}\int_T f(t)\cos(n\omega_0 t)dt$ $b_n=\frac{2}{T}\int_T f(t)\operatorname{sen}(n\omega_0 t)dt$	
$f(t)=C_0+\sum_{n=1}^{\infty}C_n\cos(n\omega_0 t-\theta_n)$	$C_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$; $C_0=a_0/2$ $\theta_n=\tan^{-1}(b_n/a_n)$	$C_n=\frac{1}{2}\lvert d_n\rvert$ $\theta_n=-\angle d_n$
$f(t)=C_0+\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{2}C'_n\cos(n\omega_0 t-\theta_n)$	Valor eficaz de las componentes armónicas $C'_n=C_n/\sqrt{2}$	
$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}d_n e^{jn\omega_0 t}$	$d_n=\frac{1}{2}(a_n-jb_n)$	

X.2 Propiedades de la Serie de Fourier

Señal periódica	*Serie de Fourier*
$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}d_n e^{jn\omega_0 t}$ Periódica de Período T ($\omega_0=2\pi/T$)	$d_n=\frac{1}{T}\int_T f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$
$Af_1(t)+Bf_2(t)$	$AF_1(\omega)+BF_2(\omega)$
$f(t-t_0)$	$d_n e^{-jn(2\pi/T)t_0}$
$e^{jM(2\pi/T)t}f(t)$	d_{n-M}
$f(\alpha\cdot t)$, $\alpha>0$ Periódica de período T/α	d_n
$\int_T f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)dt$	$Td_{n,1}d_{n,2}$
$f_1(t)\cdot f_2(t)$	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}d_{k,1}d_{n-k,2}$
$f(t)$ real	$\begin{cases}d_n=d_{-n}^*\\ \lvert d_n\rvert=\lvert d_{-n}\rvert,\ \angle d_n=-\angle d_{-n}\end{cases}$
Relación de *Parseval* para señales periódicas	$\frac{1}{T}\int_T\lvert f(t)\rvert^2dt=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\lvert d_n\rvert^2=C_0+\sum_{n=1}^{\infty}(C'_n)^2=F_{rms}^2$

X.3 Propiedades de la Transformada de Fourier

Señal aperiódica	*Transformada de Fourier*
$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$	$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$
$a\cdot f_1(t)+b\cdot f_2(t)$	$a\cdot F_1(\omega)+b\cdot F_2(\omega)$
$f(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}F(\omega)$
$e^{j\omega_0 t}f(t)$	$F(\omega-\omega_0)$
$f(at)$	$F(\omega/a)/\|a\|$
$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)d\tau$	$F_1(\omega)\cdot F_2(\omega)$
$f_1(t)\cdot f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}F_1(\omega)*F_2(\omega)$
$\frac{d}{dt}x(t)$	$j\omega F(\omega)$
$\int_{-\infty}^{t}f(t)dt$	$\frac{1}{j\omega}F(\omega)+\pi F(0)\delta(\omega)$
$t\cdot f(t)$	$j\frac{d}{d\omega}F(\omega)$
$f(t)$ real	$\begin{cases}F(\omega)=F^*(-\omega)\\ \|F(\omega)\|=\|F(-\omega)\|;\quad \angle F(\omega)=-\angle F(-\omega)\end{cases}$
Dualidad	$f(t)\xrightarrow{\Im}F(\omega)$ $F(t)\xrightarrow{\Im}2\pi\cdot f(-\omega)$
Relación de Parseval para señales aperiódicas	$\int_{-\infty}^{+\infty}\|f(t)\|^2\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\|F(\omega)\|^2\,d\omega$

X.4 Propiedades de la DFT[1]

Señal temporal (N muestras)	*DFT (N valores)*
$f(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}F(k)e^{j2\pi nk/N}$	$F(k)=\sum_{n=0}^{N-1}f(n)e^{-j2\pi kn/N}$
Eje de tiempos (período de muestreo T) $nT\in[0\quad 1\quad \ldots\quad N-1]\times T$	Eje de Frecuencias $k\omega_0\in[0\quad 1\quad \cdots\quad N-1]\times\frac{2\pi}{NT}$
$f(n)+g(n)$	$F(k)+G(k)$
$F(n)/N$	$f(-k)$
$f(n-i)$	$F(k)e^{-j2\pi ki/N}$
$f(n)e^{j2\pi ni/N}$	$F(k-i)$
$f(n)\otimes g(n)$	$F(k)\cdot G(k)$
$f(n)\cdot g(n)$	$F(k)\otimes G(k)/N$
Teorema de Parseval	$\sum_{n=0}^{N-1}f^2(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\lvert F(k)\rvert^2$
Relación con los coeficientes complejos d_n de la serie de Fourier	$d_k=\frac{1}{N}F_{DFT}(k\omega_0)$
Relación con la Transformada de Fourier $f(t)\xrightarrow{\Im}F_{TF}(\omega)$	$F_{TF}(k\omega_0)=T\cdot F_{DFT}(k\omega_0)$

[1] Para hacer más compacta la notación se consideran las siguientes igualdades: $F(k) = F_{DFT}(k\omega_0)$ y $f(n) = f(nT)$

X.5 Propiedades de la Serie de Fourier en Tiempo Discreto

Señal periódica	*Serie de Fourier*
$f[n]=\sum_{k=\langle N\rangle} d_k e^{jk(2\pi/N)n}$ Periódica de período N $f[n]=f[n+N]$	$d_k=\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} f[n]e^{-jk(2\pi/N)n}$ Periódica de período N $d_k=d_{k+N}$
$A_1\cdot f_1[n]+A_2\cdot f_2[n]$	$A_1\cdot d_{k,1}[n]+A_2\cdot d_{k,2}[n]$
$f[n-n_0]$	$d_k e^{-jk(2\pi/N)n_0}$
$e^{jM(2\pi/N)n}f[n]$	d_{k-M}
$f^*[n]$	d^*_{-k}
$f_{(m)}[n]=\begin{cases} f[n/m] & \text{si } \mathbf{n} \text{ es multiplo de m} \\ 0 & \text{si } \mathbf{n} \textit{ no} \text{ es multiplo de m}\end{cases}$ (periódica con período n·M)	$\frac{1}{m}d_k$
$\sum_{r=\langle N\rangle} f_1[r]\cdot f_2[n-r]$	$Nd_{k,1}d_{k,2}$
$f_1[n]\cdot f_2[n]$	$\sum_{l=\langle N\rangle} d_{l,1}d_{k-l,2}$
$f[n]-f[n-1]$	$\left(1-e^{-jk(2\pi/N)}\right)d_k$
$f[n]$ real	$\begin{cases} d_k=d^*_{-k} \\ \lvert d_k\rvert=\lvert d_{-k}\rvert;\ \angle d_k=-\angle d_{-k}\end{cases}$
Relación de Parseval para señales periódicas	$\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle}\lvert f[n]\rvert^2=\sum_{k=\langle N\rangle}\lvert d_k\rvert^2$

X.6 Propiedades de la Transformada de Fourier en Tiempo Discreto

Señal aperiódica	*Transformada de Fourier*
$f[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}F(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega$	$F(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f[n]e^{-j\Omega n}$ Periódica de período 2π
$a_1\cdot f_1[n]+a_2\cdot f_2[n]$	$a_1\cdot F_1(\Omega)+a_2\cdot F_2(\Omega)$
$f[n-n_0]$	$e^{-j\Omega n_0}F(\Omega)$
$e^{j\Omega_0 n}f[n]$	$F(\Omega-\Omega_0)$
$f[-n]$	$F(-\Omega)$
$f_{(k)}[n]=\begin{cases}f[n/k] & \text{si } \mathbf{n} \text{ es multiplo de k}\\ 0 & \text{si } \mathbf{n} \text{ no es multiplo de k}\end{cases}$	$F(k\Omega)$
$f_1[n]*f_2[n]=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}f_1[m]\cdot f_2[n-m]$	$F_1(\Omega)\cdot F_2(\Omega)$
$f_1[n]\cdot f_2[n]$	$\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}F_1(\theta)F_2(\Omega-\theta)d\theta$ Convolución periódica
$f[n]-f[n-1]$	$\left(1-e^{-j\Omega}\right)F(\Omega)$
$\sum_{m=-\infty}^{n}f[m]$	$\frac{1}{1-e^{-j\Omega}}F(\Omega)+\pi F(0)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\Omega-2\pi k)$
$n\cdot f[n]$	$j\frac{dF(\Omega)}{dt}$
$f[n]$ real	$\begin{cases}F(\Omega)=F^*(-\Omega)\\ \lvert F(\Omega)\rvert=\lvert F(-\Omega)\rvert;\ \angle F(\Omega)=-\angle F(-\Omega)\end{cases}$
Relación de Parseval para señales aperiódicas	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\lvert f[n]\rvert^2=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\lvert F(\Omega)\rvert^2 d\Omega$

X.7 Series de Fourier de funciones periódicas

Señal	*Serie de Fourier (d_k)*
Onda cuadrada periódica: $f(t)=\begin{cases}1 & 0<t<T_1\\ 0 & T_1<t\le T_0\end{cases}$ $f(t)=f(t+T_0)$	$a_0/2=T_1/T$ $a_n=\dfrac{\operatorname{sen} n\omega_0 T_1}{\pi n}$ $b_n=\dfrac{1-\cos n\omega_0 T_1}{\pi n}$
Senoide rectificada de media onda $f(t)=\begin{cases}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{T_0}t & t<T_0/2\\ 0 & T_0/2<t\le T_0\end{cases}$	$a_0/2=1/\pi$ $a_n=2/\pi(1-n^2)$ en $n=2,4,6,...$; $a_n=0$ $n=1,3,5,...$ $b_1=1/2$; $b_n=0$ en $n=2,3,4,5,...$
Senoide rectificada de onda completa $f(t)=\begin{cases}\operatorname{sen}\frac{4\pi}{T_0}t & t<T_0/2\\ 0 & T_0/2<t\le T_0\end{cases}$	$a_0/2=2/\pi$ $a_n=2/\pi(1-4n^2)$ $b_n=0$
1	$d_0=a_0/2=1$
$\cos\omega_0 t$	$d_{-1}=d_1=\frac{1}{2}$
$\operatorname{sen}\omega_0 t$	$d_{-1}=\frac{1}{2}j$; $d_1=-\frac{1}{2}j$
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)$	$d_k=1/T$

X.8 Transformadas de Fourier

Señal	*Transformada de Fourier*
$f(t)=\begin{cases}1 & \lvert t\rvert < T_1 \\ 0 & \lvert t\rvert > T_1\end{cases}$	$\dfrac{2\,\mathrm{sen}\,\omega T_1}{\omega}=2T_1\,\mathrm{sinc}\left(\dfrac{\omega T_1}{\pi}\right)$
$\delta(t)$	1
$u(t)=\begin{cases}0 & t<0 \\ 1 & t>0\end{cases}$	$\dfrac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$
$\delta(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$
$e^{-at}u(t),\ \mathrm{real}\{a\}>0$	$1/(a+j\omega)$
$t\,e^{-at}u(t),\ \mathrm{real}\{a\}>0$	$1/(a+j\omega)^2$
$\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t),\ \mathrm{real}\{a\}>0$	$1/(a+j\omega)^n$
1	$2\pi\delta(\omega)$
$\cos\omega_0 t$	$\pi\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right]$
$\mathrm{sen}\,\omega_0 t$	$-j\pi\left[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)\right]$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)$	$\dfrac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega-\dfrac{2\pi k}{T}\right)$

X.9 Transformadas de Fourier en Tiempo Discreto

Señal discreta	*Transformada de Fourier*
$f[n]=\begin{cases}1 & \lvert n\rvert < N_1\\ 0 & \lvert n\rvert > N_1\end{cases}$	$\dfrac{\operatorname{sen}\left[\Omega\left(N_1+\frac{1}{2}\right)\right]}{\operatorname{sen}(\Omega/2)}$
$\delta[n]$	1
$\delta[n-n_0]$	$e^{-j\Omega n_0}$
$u[n]=\begin{cases}0 & n<0\\ 1 & n>0\end{cases}$	$\dfrac{1}{1-e^{-j\Omega}}+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\pi\delta(\Omega-2\pi k)$
$\dfrac{\operatorname{sen}(Wn)}{\pi n}=\dfrac{W}{\pi}\operatorname{sinc}\left(\dfrac{Wn}{\pi}\right)$	Onda periódica $F(\Omega)=\begin{cases}1 & 0\le\lvert\Omega\rvert\le W\\ 0 & W<\lvert\Omega\rvert\le\pi\end{cases}$ $F(\Omega+2\pi)=F(\Omega)$
$a^n u[n];\ \lvert a\rvert<1$	$\dfrac{1}{1-a\,e^{-j\Omega}}$
$(n+1)a^n u[n],\ \lvert a\rvert<1$	$1/\left(1-a\,e^{-j\Omega}\right)^2$
$\dfrac{(n+r-1)!}{(r-1)!n!}a^n u[n],\ \lvert a\rvert<1$	$1/\left(1-a\,e^{-j\Omega}\right)^r$

X.10 Series y Transformadas de Fourier de Señales Periódicas en Tiempo Discreto

Señal	*Transformada de Fourier* / *Serie de Fourier*
$\cos \Omega_0 N$	$\pi \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi l) + \delta(\Omega + \Omega_0 - 2\pi l)$
	$\Omega_0 = 2\pi m/N \Rightarrow d_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & k = \pm m, \pm m \pm N, \pm m \pm 2N, \ldots \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$ $\Omega_0/2\pi$ irracional $\Rightarrow f[n]$ no es periódica
$\text{sen}\, \Omega_0 N$	$\frac{\pi}{j} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi l) - \delta(\Omega + \Omega_0 - 2\pi l)$
	$\Omega_0 = 2\pi m/N \Rightarrow d_k = \begin{cases} +1/2j & k = +r, +r \pm N, +r \pm 2N, \ldots \\ -1/2j & k = -r, -r \pm N, -r \pm 2N, \ldots \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$ $\Omega_0/2\pi$ irracional $\Rightarrow f[n]$ no es periódica
$e^{j\Omega_0 N}$	$2\pi \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi l)$
	$\Omega_0 = 2\pi m/N \Rightarrow d_k = \begin{cases} 1 & k = \pm r, +r \pm N, \pm r \pm 2N, \ldots \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$ $\Omega_0/2\pi$ irracional $\Rightarrow f[n]$ no es periódica
$\sum_{k=\langle N \rangle} d_k e^{jk(2\pi/N)n}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k \delta\left(\Omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$
	d_k
$f[n] = 1$	$2\pi \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - 2\pi l)$
	$d_k = \begin{cases} 1 & k = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$
$f[n] = \begin{cases} 1 & \lvert n \rvert \le N_1 \\ 0 & N_1 < \lvert n \rvert \le N/2 \end{cases}$ $f[n+N] = f[n]$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k \delta(\Omega - 2\pi k/N)$
	$d_k = \begin{cases} (2N_1+1)/N & k = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots \\ \dfrac{\text{sen}\left[(2\pi k/N)(N_1 + \frac{1}{2})\right]}{N\,\text{sen}(2\pi k/N)} & \text{resto} \end{cases}$
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - kN]$	$\frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - 2\pi k/N)$
	$d_k = 1/N$

Bibliografía

Hwei P. Hsu; "*Análisis de Fourier*", Argentina, Addison-Wesley Iberoamericana, 1973

Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, con la colaboración de Ian T. Young; "*Señales y sistemas*", México, Prentice-Hall Hispanoamericana, 1994

E. Oran Brigham; "*The Fast Fourier transform*", New Jersey, Prentice-Hall, 1974

W. Kamen y Bonnie S. Heck; "*Fundamentals of signals and systems using Matlab*", Upper Saddle River (New Jersey), Prentice Hall, 1997

W. Bolton; "*Fourier series*", Essex, Longman, 1995

Gerald B. Folland; "*Fourier analysis and its applications*", Pacific Grove (California), Brooks/Cole, 1992

Katsuhiko Ogata; "*Ingeniería de control moderna*", México, Prentice-Hall Hispanoamericana, 1980

J. Arrillaga y L.I. Eguíluz; "*Armónicos en sistema de potencia*", Santander, Servicio de publicaciones de la Universidad de Cantabria, 1994

A. Bruce Carlson; "*Teoría de circuitos: ingeniería, conceptos y análisis de circuitos eléctricos lineales*", Madrid, Thomson, 2002

Laboratorio de electrotecnia y redes eléctricas; "*Análisis de redes eléctricas*", Vigo, Tórculo, 1995